Chapitre IV : Fonction du second degré et du troisième degré

Fonctions polynômes de degré 2 :
– représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$;
– axes de symétrie ;
– racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).

Fonctions polynômes de degré 3 :
– représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto ax^3 + b$;
– racines et signe d'un polynôme de degré 3 de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x-x_3)$;
– équation $x^3 = c$; racine cubique d'un nombre réel positif ; notations $c^{\frac{1}{3}}$c et $\sqrt[3]{c}$.

Capacités attendues
Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
– Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie…).
– Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2 ou 3.
– Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
– Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
– Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ et $x^3 = c$, avec c positif.

Table des matières

I. Fonction polynôme de degré 2

1. Définition

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{(forme développée)}$$

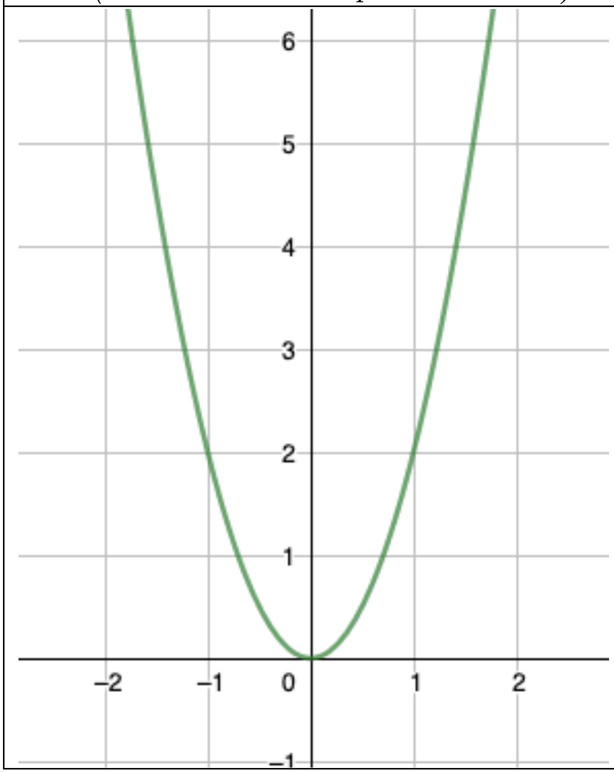
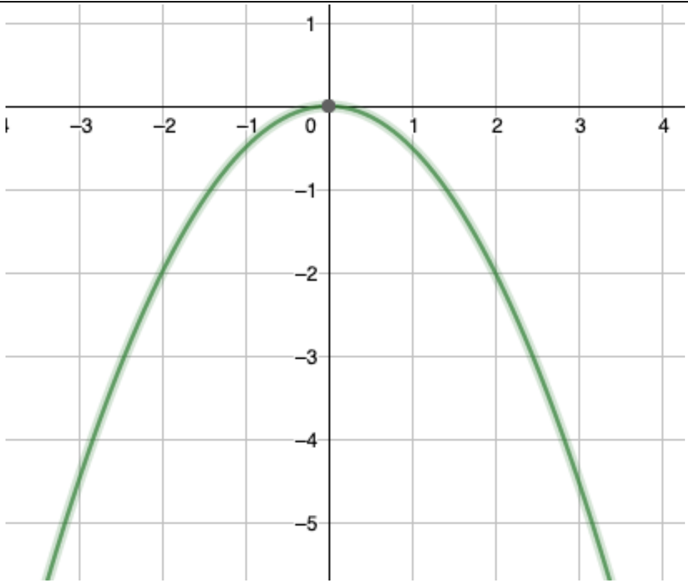
où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole ( si a>0 et  si a>0).

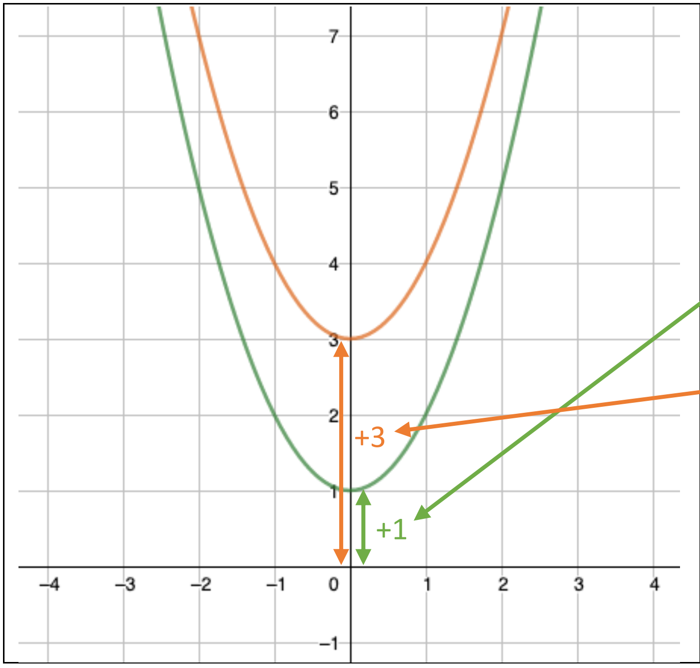
2. Cas d'étude en 1ère STMG :

- $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$ ***et*** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}$

La courbe représentative de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = ax^2$ est une parabole de sommet O l'origine.

a>0 (a=2 dans l'exemple ci-dessous)	*a<0 (a=-0,5 dans l'exemple ci-dessous)*
	

La courbe représentative de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = ax^2 + c$ est une parabole de sommet *(0 ;c)*.
Le paramètre c entraine un déplacement de c de la parabole dans le sens vertical.



En vert : $f(x) = x^2 + 1$

En orange : $f(x) = x^2 + 3$

- $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ **(forme factorisée)**

La courbe représentative de cette fonction est une parabole dont le sommet a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ et pour ordonnée $f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

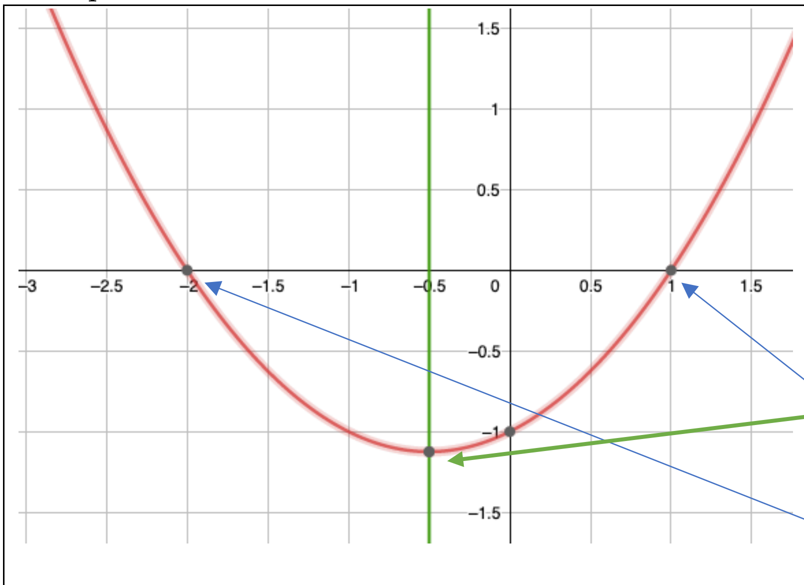
L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale d'équation $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

3. Signe de la fonction :

On supposera que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$		*Signe de a*	0	*Signe de -a*	0	*Signe de a*	

Exemple :



Fonction représentée :

$$f(x) = 0{,}5(x + 2)(x - 1)$$

Pour l'étude, on fait apparaitre des – dans la parenthèse en remplaçant les + par –(- …).

$$f(x) = 0{,}5(x - (-2))(x - 1)$$

On a donc : x_1=-2 et x_2=1.

Le sommet est donc atteint pour $x = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5$.

L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = -0{,}5$. (en vert)

La courbe recoupe l'axe des abscisses en *x*=-2 et *x*=1.

Signe de la fonction exemple :

a=0,5, donc a est positif.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	-	0	$+$	

4. Racine d'un polynôme :

Définition :

- Les racines d'un polynôme sont les solutions de l'équation *f(x)=0.*
- Les valeurs x_1 *et* x_2 sont les racines du polynôme.

Exemple :

Pour la fonction $f(x) = 0{,}5(x + 2)(x - 1)$:

On fait bien apparaitre des – dans les parenthèses, en remplaçant les + par –(- :

$$f(x) = 0{,}5(x + 2)(x - 1) = 0{,}5(x - (-2))(x - 1).$$

Les racines sont donc -2 et 1.

Méthode : Factoriser une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$.

Sachant que -5 est une racine de ce polynôme, factoriser *f*.

Correction :

On sait que la forme factorisée est de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ *et que nous connaissons une des 2 racines, on peut dire que f peut s'écrire :* $f(x) = a(x - x_1)\big(x - (-5)\big) = a(x - x_1)(x + 5)$.

Nous allons développer cette forme puis procéder à ce que l'on appelle une identification :

$a(x - x_1)(x + 5) = a(x^2 - x_1 \times x + 5x - 5x_1) = ax^2 - a \times x_1 \times x + 5ax - 5ax_1$.

On veut que cette expression soit égale à celle donnée dans l'énoncé :

$$ax^2 - a \times x_1 \times x + 5ax - 5ax_1 = 2x^2 + 4x - 30.$$

Cela implique que les coefficients des x^2 *soient identiques, ceux des x aussi et ceux sans x aussi :*

$$ax^2 - a \times x_1 \times x + 5ax - 5ax_1 = 2x^2 + 4x - 30$$

On a donc :

$$a = 2$$
$$-a \times x_1 + 5a = 4$$
$$-5ax_1 = -30$$

Attention à ne pas oublier les « -» !!!

Comme a=2, notre deuxième équation devient :

$-2 \times x_1 + 5 \times 2 = 4$ *soit* $-2 \times x_1 + 10 = 4$

On peut la résoudre :

$-2 \times x_1 = 4 - 10$ *soit* $-2 \times x_1 = -6$ *donc* $x_1 = \frac{-6}{-2} = 3$.

On a trouvé la deuxième racine qui est 3, et ainsi :

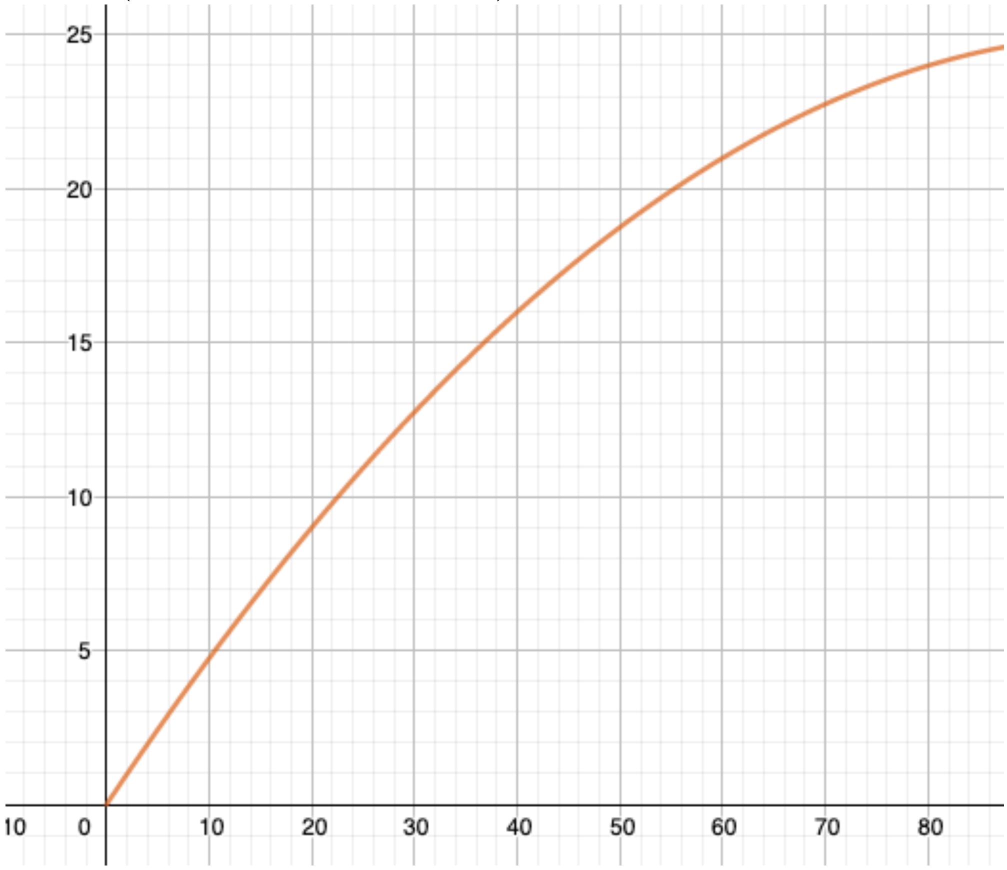
$$f(x) = a(x - x_1)(x + 5) = 2(x - 3)(x + 5)$$

5. Exercice Type E3C :

Un golfeur fait un tir sur un terrain plat avec un club de golf de type fer 5.
L'équation de la trajectoire la balle de golf est donné par la fonction :

$$f(x) = -0{,}0025x^2 + 0{,}5x$$

La courbe représentative de la fonction f représentant le début de la trajectoire de la balle est donné ci-dessous (le joueur de trouve en O):



1. Par lecture graphique :
a. Quelle est la hauteur de la balle, lorsqu'elle est à une distance de 20m du joueur ?
b. Quand la balle est à une hauteur de 20 m, à quelle distance horizontale se trouve-t-elle du joueur ?

2. Montrer que *f(x)* peut se mettre sous la forme : $-0{,}0025x(x-200)$.

3. En déduire la valeur de la hauteur maximal atteinte par la balle.

4. Le fer qu'il a utilisé pour ce lancer est annoncé avec une portée de 200 m. Est-ce le cas ?

Correction :
1. a. Par lecture graphique, on trouve une hauteur de balle de 9m.
b. D'après le graphique, lorsque la balle est à 20m de hauteur, la balle se trouve à 55 m environ du joueur.

2. $-0{,}0025x(x-200) = -0{,}0025x \times x - 0{,}0025x \times (-200) = -0{,}0025x^2 + 0{,}5x = f(x)$.

3. $f(x) = -0{,}0025x(x-200) = -0{,}0025(x-0)(x-200)$.
Le maximum est atteint pour $x = \frac{0+200}{2} = 100$ *et il vaut* $f(100) = -0{,}0025 \times 100(100-200) = 25$.
La hauteur maximale de la balle est de 25m.

4. Les points où la balle touche le sol sont les racines de f(x) : 0 (point de départ) et 200.
La balle retouche donc le sol à 200 m du joueur, les données sont bonnes.

II. Fonction polynôme de degré 3

1. Définition

Définition :

On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec a, b, c et d des nombres réels, avec $a \neq 0$.

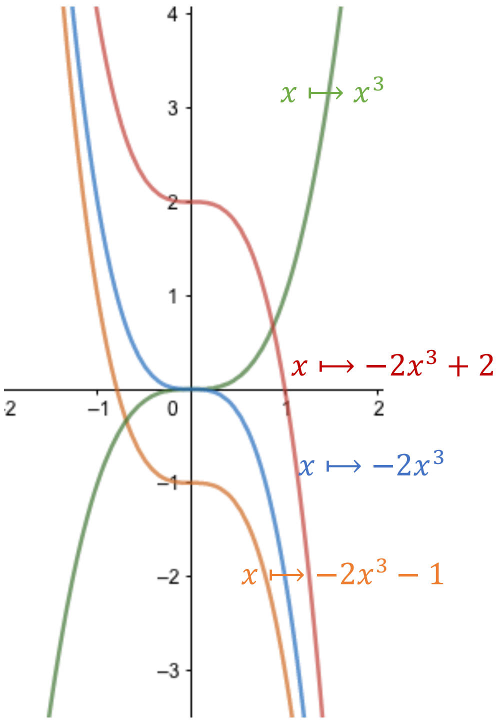
2. Cas d'étude en 1ère STMG :

- $\boldsymbol{f(x) = ax^3}$ ***et*** $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + b}$

Propriétés :

1. Les fonctions $x \longmapsto ax^3$ *et* $x \longmapsto ax^3 + b$, avec $a \neq 0$, sont :
   - strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$.
   - strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.

2. Dans la fonction $x \longmapsto ax^3 + b$, le paramètre b permet un décalage de la courbe représentative de b selon l'axe vertical.



3. Résolution d'une équation du type $\boldsymbol{x^3 = k}$.

Propriété :

Pour tout réel k, l'équation $x^3 = k$ admet une unique solution qui est : $x = k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$.

Cette solution est appelée la racine cubique de k.

Méthode :

Résoudre les équations suivantes :

(1) $x^3 = 4$

(2) $x^3 = -2$

(3) $x^3 + 5 = 8$

Correction :

(1) La solution est la racine cubique de 4 : $S = \{\sqrt[3]{4}\}$.

(2) La solution est la racine cubique de -2 : $S = \{\sqrt[3]{-2}\}$.

(3) Pour cette équation, nous allons déjà déplacer le +5. (En changeant de côté, n'oubliez pas de le « transformer » en -5.

$x^3 + 5 = 8$

$x^3 = 8 - 5$

$x^3 = 3$

$x = \sqrt[3]{3}$ (ou $x = 3^{\frac{1}{3}}$)

Donc $S = \{\sqrt[3]{3}\}$.

Exercice :
Un producteur de poires étudie le coût total de sa production. Pour une quantité q de zéro à 6 tonnes de poire, le coût total en milliers d'euros est modélisée par $C(q) = 0{,}05q^3 + 4$.

Quelle quantité de poires doit-il ramasser pour que le coût soit de 10 250€ ?

Correction :
10 250 € représente 10,25 milliers d'euros.
On veut donc que : $0{,}05q^3 + 4 = 10{,}25$.

$$0{,}05q^3 = 10{,}25 - 4$$
$$0{,}05q^3 = 6{,}25$$
$$q^3 = \frac{6{,}25}{0{,}05}$$
$$q^3 = 125$$
$$q = \sqrt[3]{125} = 5$$

Il doit donc produire 5 tonnes de poires, pour avoir un coût de production de 10250.

4. Racines et signe du polynôme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Comme pour les polynômes du 2nd degré, cette forme est plus pratique pour lire les racines de notre polynôme.

Propriété :
Un polynôme de degré 3 ayant la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, admet 3 racines (3 solutions à l'équation $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$) x_1, x_2 et x_3.

Remarque : il faudra bien faire apparaitre les moins dans chacune des parenthèses !

Exemple :
Donner les racines du polynôme : $P(x) = -2(x + 0{,}5)(x + 1)(x - 1)$.

Correction :
Je vais faire apparaitre les – dans les parenthèses en remplaçant les + par des –(- :

$$P(x) = -2(x + 0{,}5)(x + 1)(x - 1) = -2(x - (-0{,}5))(x - (-1))(x - 1)$$

Et on lit les racines directement après le premier - :
Les racines sont : -0,5 ; -1 et 1.
Cela veut dire que P(-0,5)=0, P(-1)=0 et P(1)=0.

5. Signe d'un polynôme de degré 3:

Rappel :
x-x_1 est positif quand x est supérieur à x_1.
Exemple :
$x-3$ est positif pour $x>3$.
$x+1$ (qui est égal à $x-(-1)$) est positif pour $x>-1$.

Pour le signe de ce polynôme, nous ferons le tableau de signes suivant :
Nous faisons une ligne par facteur, et pour la dernière ligne (en orange), on applique la règle des signes par colonne.

Si *a>0* :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
a		+		+		+		+	
$(x-x_1)$		-	0	+		+		+	
$(x-x_2)$		-		-	0	+		+	
$(x-x_3)$		-		-		-	0	+	
$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$		-	0	+	0	-	0	+	

Pour la dernière ligne, nous appliquons la règle des signes par colonne. Ainsi, pour la première colonne, il y a 3 signes -, soit un nombre impair, le résultat est -.

Si *a<0* :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
a		-		-		-		-	
$(x-x_1)$		-	0	+		+		+	
$(x-x_2)$		-		-	0	+		+	
$(x-x_3)$		-		-		-	0	+	
$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$		+	0	-	0	+	0	-	

Pour la dernière ligne, nous appliquons la règle des signes par colonne. Ainsi, pour la première colonne, il y a 4 signes -, soit un nombre pair, le résultat est +.

Exercice :
Faire le tableau de signe de la fonction : $x \longmapsto 0{,}25(x+3)(x-1)(x-2)$.

Correction :
Le polynôme peut se mettre sous la forme :
$0{,}25(x+3)(x-1)(x-2) = 0{,}25(x-(-3))(x-1)(x-2)$
Les racines de ce polynôme sont donc -3, 1 et 2.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
0,25		+		+		+		+	
$(x+3)$		-	0	+		+		+	
$(x-1)$		-		-	0	+		+	
$(x-2)$		-		-		-	0	+	
$0{,}25(x+3)(x-1)(x-2)$		-	0	+	0	-	0	+	