Fiche d'exercices 5 – Notion de fonction
Problèmes de synthèse

Exercice 1 :

Jérémy souhaite régler l'inclinaison des feux de croisement de sa voiture.
Il éclaire le mur de son garage comme l'illustre le dessin ci-dessous où P désigne le phare.

Dans le rectangle PRS, Jérémy mesure les dimensions suivantes : PS=0,65 m et SR=5 m.
Dans la modélisation décrite ci-dessous, on désigne par x le distance SB d'éclairage des feux, et par d la longueur RA mesurée sur le mur.
Nous travaillerons pour $x \in [0; 100]$.

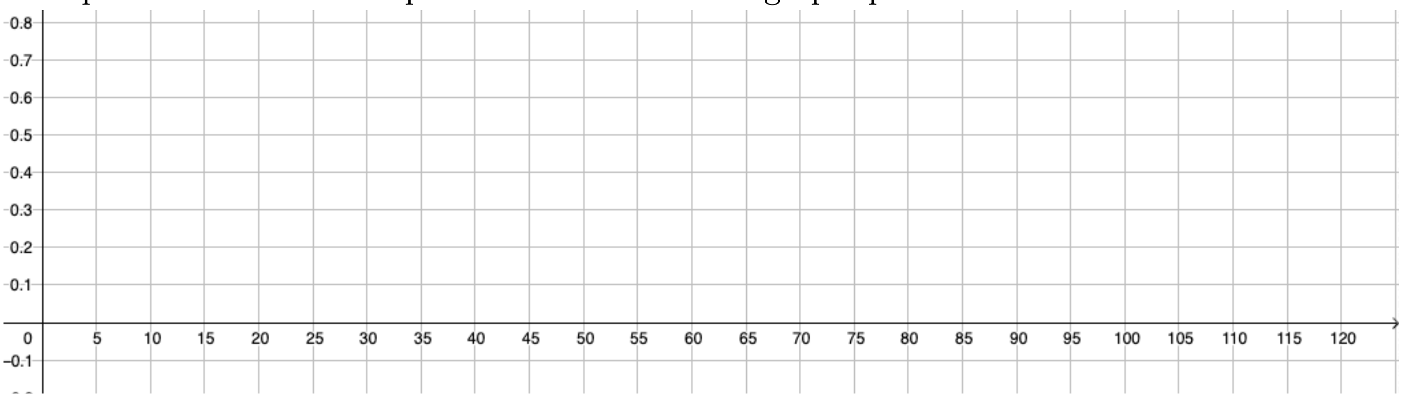
1. Exprimer d en fonction de x. (Pensez Thalès...)

2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$d(x)$												

x	70	80	90	100	110	120
$d(x)$						

3. Représenter la courbe représentative de d sur le graphique ci-dessous.

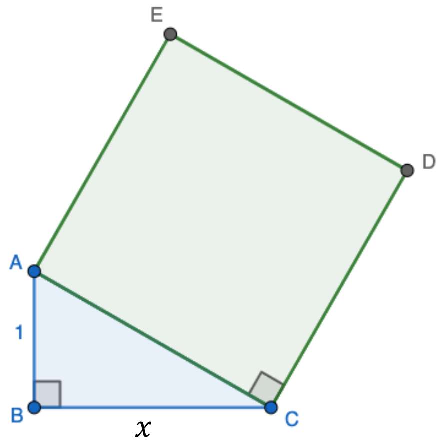


4. Pour être conforme, la distance d'éclairage x doit être comprise entre 30 et 40 mètres.
À l'aide du graphique, entre quelles valeurs doit se situer la longueur d, afin que son éclairage soit conforme.

5. Jérémy souhaite vérifier que ses feux de route doivent éclairer une distance minimale de 100 mètres. Quelles valeurs de d peut-il accepter ?

Exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle en B avec AB=1.
On construit à partir de l'hypoténuse [AC] un carré ACDE.
On pose $BC = x$ ($x \geq 0$).



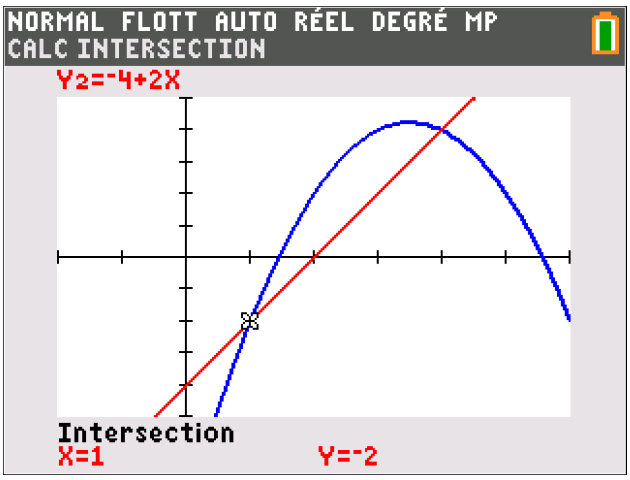
1.a. Exprimer la longueur AC en fonction de x.
b. En déduire l'expression du périmètre *f(x)* du carré ACDE en fonction de x.

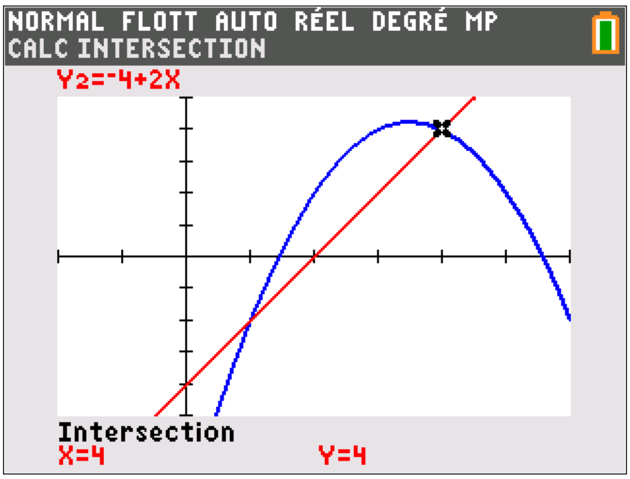
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de x de façon à ce que le périmètre de ACDE soit supérieur ou égal à 40. Expliquer votre démarche.

3. Déterminer les valeurs de x afin que le périmètre de ACDE soit strictement compris entre 16 et 80. Expliquer votre démarche.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0,5] par $f(x) = -x^2 + 7x - 8$ et g une fonction affine définie sur [0,5]. On a tracé sur une calculatrice leurs courbes respectives.
En utilisant la fonction intersection (**calculs**) de la calculatrice, on a obtenu les écrans ci-dessous.



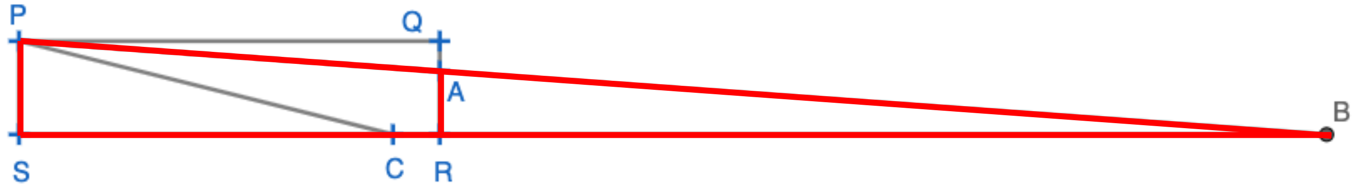


1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Correction : **Exercice 1**

Dans le rectangle PRS, Jérémy mesure les dimensions suivantes : PS=0,65 m et SR=5 m. Dans la modélisation décrite ci-dessous, on désigne par x le distance SB d'éclairage des feux, et par d la longueur RA mesurée sur le mur.

Nous travaillerons pour $x \in [0; 100]$.



1. Exprimer d en fonction de x.

Nous allons utiliser le théorème de Thalès dans la configuration repassée en rouge ci-dessus…

On a :

- *B,A,P et B,R, S alignés dans le même ordre,*
- *(PS) et (AR) sont parallèles*

D'après le théorème de Thalés :

$$\frac{BA}{BP} = \frac{BR}{BS} = \frac{AR}{PS} \Leftrightarrow \frac{BA}{BP} = \frac{x-5}{x} = \frac{d}{0{,}65}$$

On trouve : $d = 0{,}65\frac{x-5}{x} = 0{,}65\left(\frac{x}{x} - \frac{5}{x}\right) = 0{,}65\left(1 - \frac{5}{x}\right) = 0{,}65 - \frac{3{,}25}{x}$

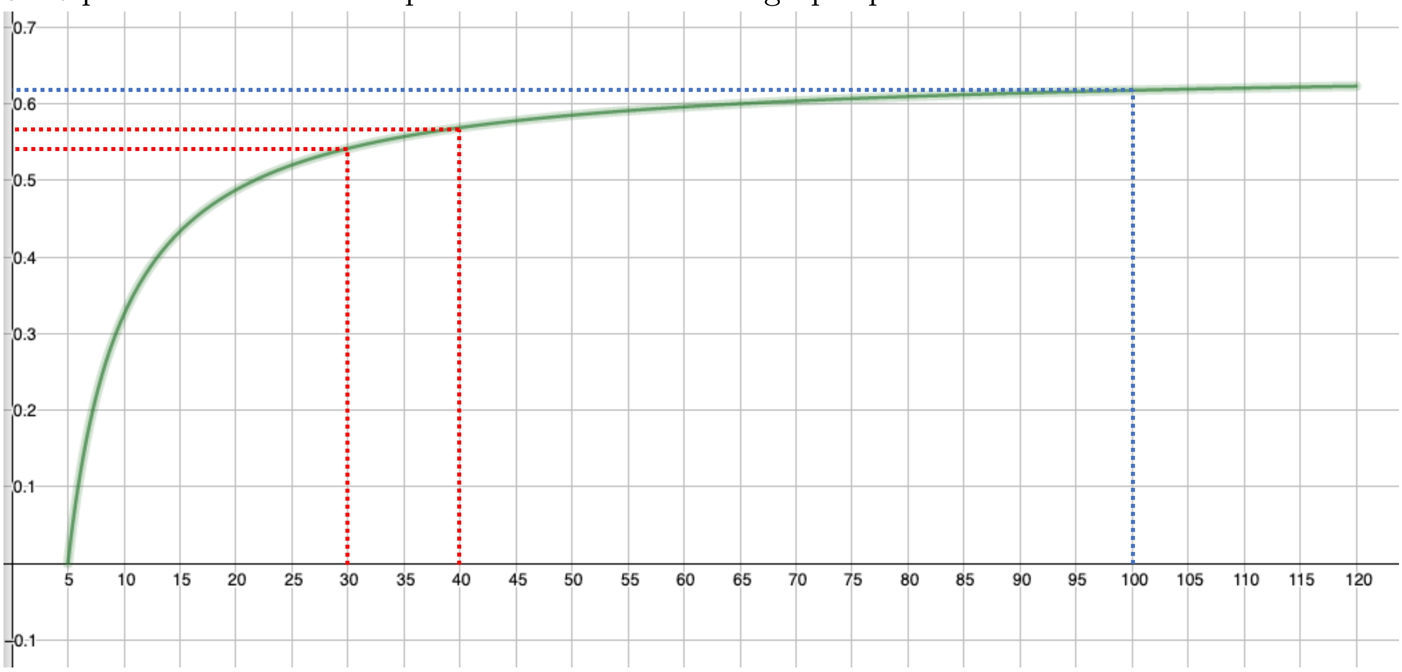
On a donc $d(x) = 0{,}65 - \frac{3{,}25}{x}$

2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$d(x)$	*0*	*0,325*	*0,43*	*0,49*	*0,52*	*0,54*	*0,56*	*0,57*	*0,58*	*0,585*	*0,59*	*0,6*

x	70	80	90	100	110	120
$d(x)$	*0,606*	*0,61*	*0,61*	*0,62*	*0,62*	*0,62*

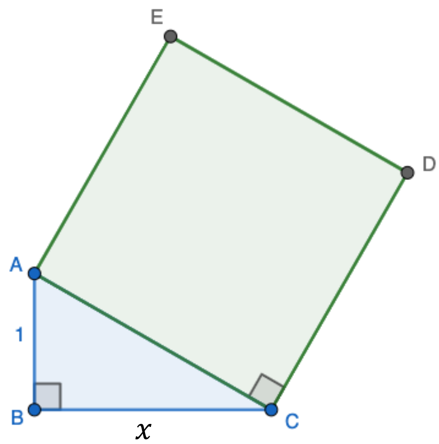
3. Représenter la courbe représentative de d sur le graphique ci-dessous.



4. Pour être conforme, la distance d'éclairage x doit être comprise entre 30 et 40 mètres.
À l'aide du graphique, entre quelles valeurs doit se situer la longueur d, afin que son éclairage soit conforme.
cf. traits rouges
Graphiquement, on lit que pour $30 \leq x \leq 40$*, on a* $0{,}54 \leq d \leq 0{,}57$.

5. Jérémy souhaite vérifier que ses feux de route doivent éclairer une distance minimale de 100 mètres. Quelles valeurs de d peut-il accepter ?
cf. traits bleus
Pour que la distance d'éclairage soit supérieur à 100, il faut que d soit supérieur à 0,61 (ou 0,62).

Exercice 2 :
ABC est un triangle rectangle en B avec AB=1.
On construit à partir de l'hypoténuse [AC] un carré ACDE.
On pose $BC = x$ $(x \geq 0)$.



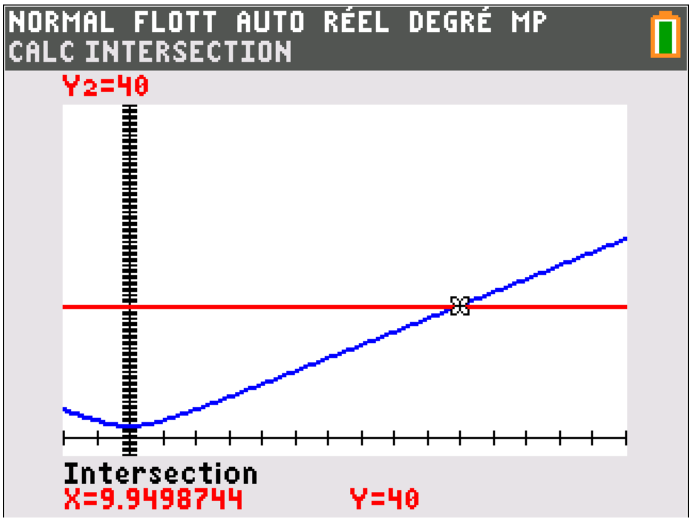
1.a. Exprimer la longueur AC en fonction de x.
Dans ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore.

$$AC^2 = BC^2 + BA^2$$
$$AC^2 = x^2 + 1^2$$
$$AC^2 = x^2 + 1$$
$$AC = \sqrt{x^2 + 1}$$

b. En déduire l'expression du périmètre *f(x)* du carré ACDE en fonction de x.

$$f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1}$$

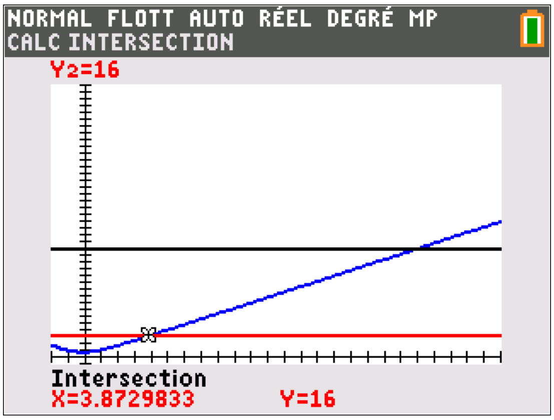
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de x de façon à ce que le périmètre de ACDE soit supérieur ou égal à 40. Expliquer votre démarche.
*On va utiliser la fonction intersection (que vous trouvez dans la zone **calculs** de votre calculatrice) en traçant notre fonction et la droite y=40.*

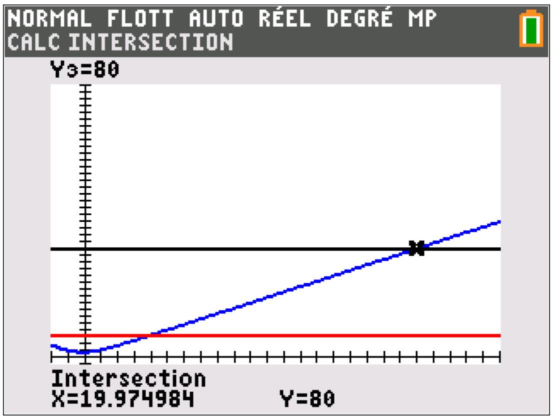


On obtient que pour que le périmètre soit supérieur ou égal à 40, il faut $x \geq 9{,}95$.

3. Déterminer les valeurs de x afin que le périmètre de ACDE soit strictement compris entre 16 et 80. Expliquer votre démarche.

On fait de même mais en traçant les droites y=16 et y=80.



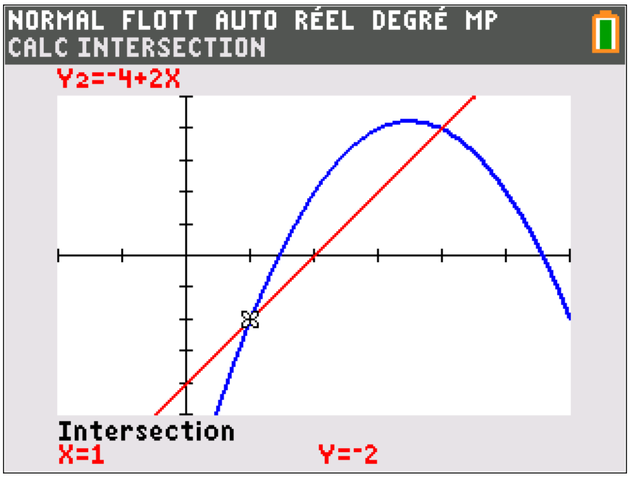


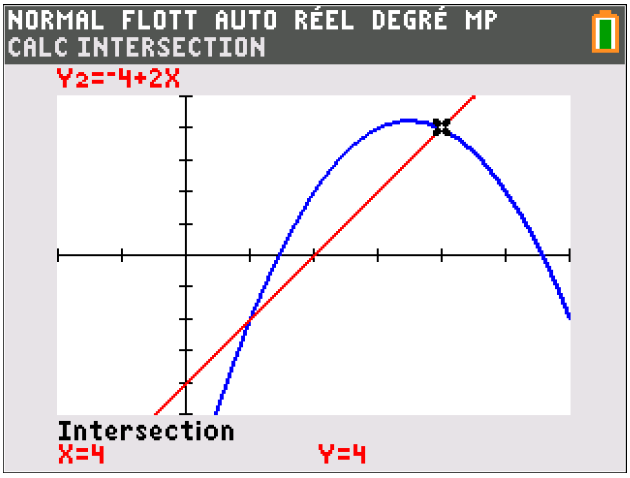
On trouve ici que $x \in \,]3{,}87; 19{,}97[$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0,5] par $f(x) = -x^2 + 7x - 8$ et g une fonction affine définie sur [0,5]. On a tracé sur une calculatrice leurs courbes respectives.

En utilisant la fonction intersection (calculs) de la calculatrice, on a obtenu les écrans ci-dessous.





1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

On lit $S = \{1; 4\}$.

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

On veut que la courbe représentative de la fonction f (parabole) soit en-dessous ou touche la courbe représentative de la fonction g (droite).

$$S = [0; 1] \cup [4; 5]$$