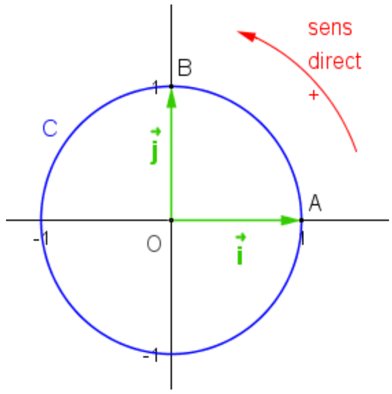
Chapitre X
Trigonométrie (3s)

Table des matières

I. Cercle trigonométrique et radian

Soit (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère orthonormé du plan.

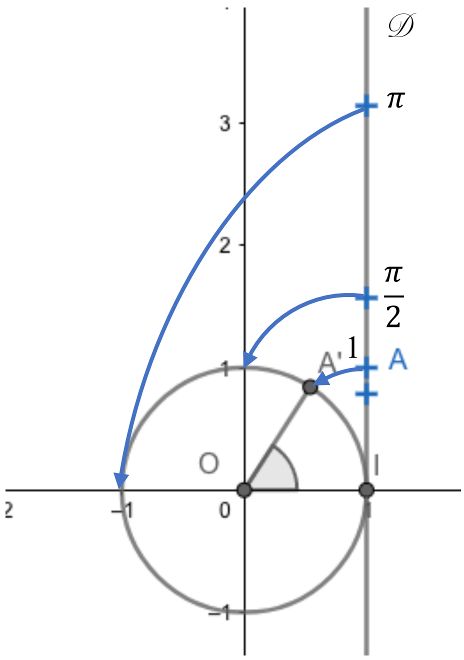


Définition :
Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarques :
- On appelle aussi on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Le périmètre du cercle trigonométrique mesure 2π.

1. Enroulement de la droite numérique

Dans un repère orthonormé (O;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et la droite $\mathscr{D}$ tangente au cercle au point I. On gradue cette droite avec tous les nombres réels, le point I correspondant au nombre 0. On enroule cette droite, dite droite des réels, autour du cercle.



Définition :
- Chaque réel x de la droite $\mathscr{D}$ vient s'appliquer sur un unique point M du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, appelé image de x sur $\mathscr{C}$.
- A tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de graduations sur la droite $\mathscr{D}$. En effet, tout point M du cercle $\mathscr{C}$ est l'image d'un réel x ; il est alors aussi l'image des réels $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x - 2\pi$, $x - 4\pi$,...

Exemple :Le réel 0 est associé au point I, le réel 1 au point A'.

2. Un nouvelle unité : le radian

Définition : Une nouvelle unité : le radian.
Un radian est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOA'}$ interceptant un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

Conséquence :
Soit A et B deux points du cercle trigonométrique. La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté AB.

Propriété :
La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.
Tableau des valeurs remarquables :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

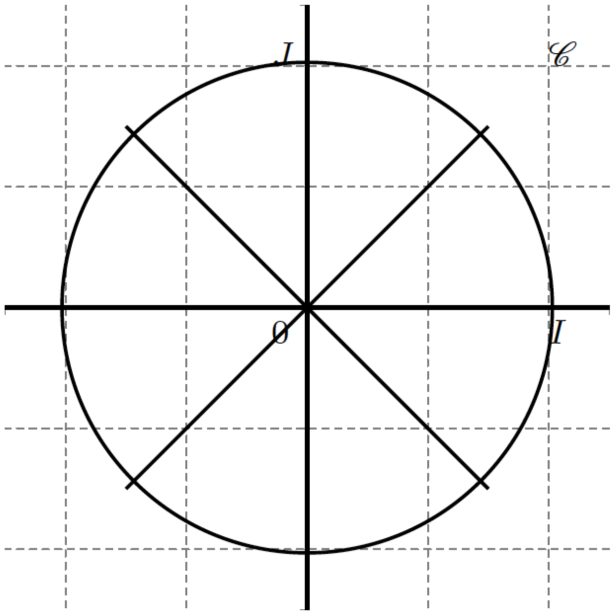
Correction : Avec un tableau de proportionnalité :

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	*33°*	?

1) $\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$ *2)* $\beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67{,}5°$

Exemple :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, placer les longueurs suivantes : $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \pi$ *et* 0.



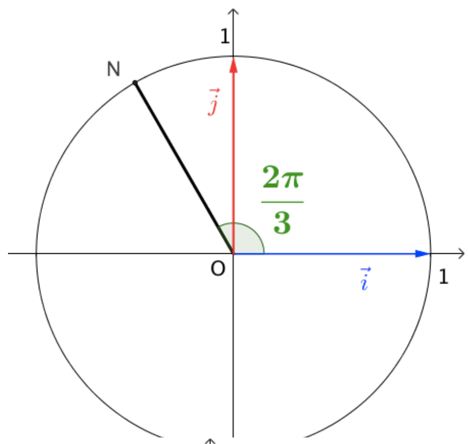
Dans cet exemple, on remarque que $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ correspondent au même point.

En effet : $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$.

Ceci est dû au fait que le droite des réels peut s'enrouler plusieurs fois autour du cercle trigonométrique.

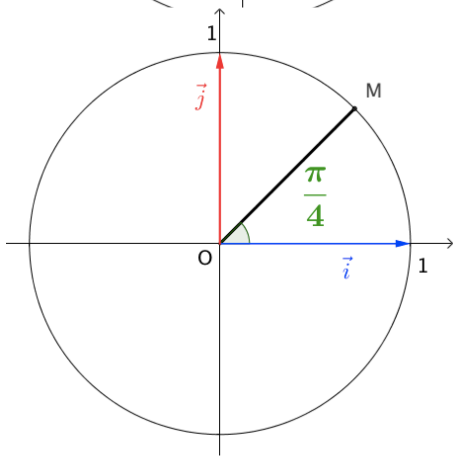
On peut ainsi trouver une infinité de réels correspondant à $-\frac{3\pi}{4}$ en ajoutant (ou soustrayant) *2π, 4π, 6π,...*

Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique_sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.
2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.



Correction :
1) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$.
Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{OM})$ *mesure* $\frac{\pi}{4}$ *rad.*

2) $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{ON})$ *mesure* $\frac{2\pi}{3}$ *rad .*



- Mesure de l'angle principal :

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{OM})$.
On dit que l'angle $(\vec{\imath};\,\overrightarrow{OM})$ est égal à θ **modulo** 2π.

Définition :
La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$.

Exemple :

Une mesure d'un angle orienté est 5π.
D'autres mesures sont : 5π - 2π ; 5π - 4π ; 5π - 6π ; … soit : 3π ; π ; -π ; …
π est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre -π exclu et π.

Méthode : Donner la mesure principale d'un angle

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

Correction :
On va chercher à écrire $\frac{27\pi}{4}$ sous la forme m + un multiple *de 2π :*
- On choisis un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :
$$\frac{27\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 7\pi - \frac{\pi}{4}$$

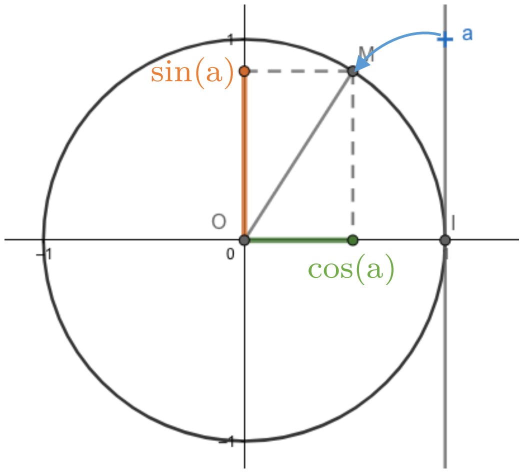
- Dans 7π, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$$\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$$

6π correspond à 3 tours entiers.
$\frac{3\pi}{4}$ est bien compris entre $-\pi$ exclu et π.
La mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

II. Cosinus et sinus d'un nombre réel et propriétés

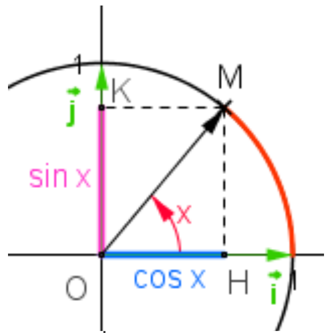
1. Définition et propriétés



Définition :
Soit M le point du cercle associé à un réel a. Le cosinus du réel a, noté *cos(a)* est l'abscisse du point M. Le sinus du réel a, noté *sin(a)* est l'ordonnée du point M.

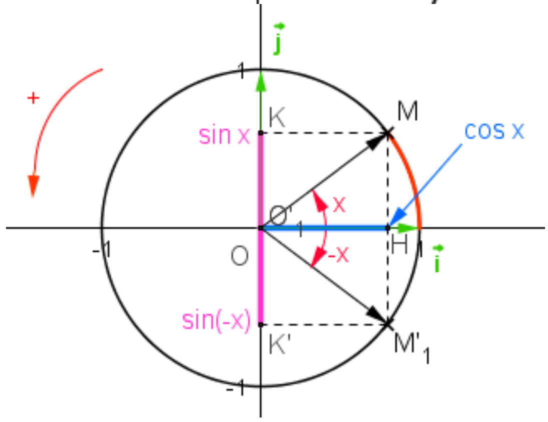
Propriétés :
Pour tout réel a :
(1) $-1 \leq \cos a \leq 1$ et $-1 \leq \sin a \leq 1$
(2) $\cos(a + 2k\pi) = \cos(a)$ et $\sin(a + 2k\pi) = \sin(a)$ pour k entier.
(3) $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$ (qui peut se noter aussi : $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$)
(4) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstrations :



1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \cos a \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin a \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.



3) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

4) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\cos(-x) = \cos(x)$ *et* $\sin(-x) = -\sin(x)$.

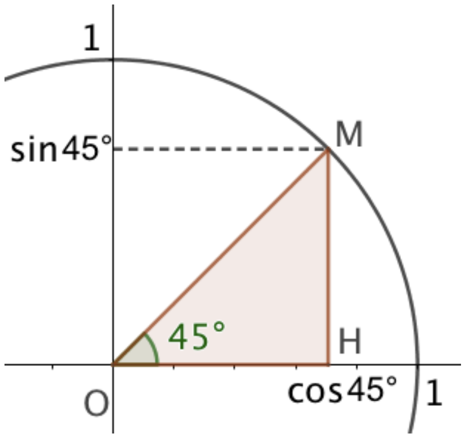
2. Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstrations au programme :

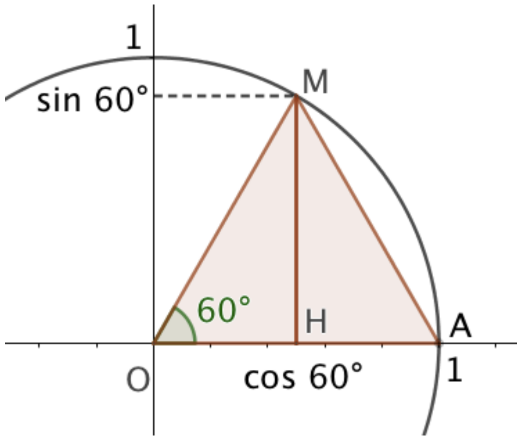
- *Démontrons que* $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ *radian est à égale à la mesure 45°.*
Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{\text{OMH}}$ *est égal à :*
180° – 90° – 45° = 45°.
Donc HO = HM et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\frac{\pi}{4})$.
Or, $\cos^2(\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$
Soit :
$\sin^2(\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$
$2\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$
$\sin^2(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$
Finalement, $\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



- *Démontrons que* $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ *et* $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{3}$ *radian est à égale à la mesure 60°.*
Le triangle OMA est isocèle en O, en effet OA = OM.
Donc les angles $\widehat{\text{OMA}}$ *et* $\widehat{\text{MAO}}$ *sont égaux à :*
(180 – 60) : 2 = 60°.
Le triangle OMA est donc équilatéral.
Ainsi, la hauteur (MH) est également une médiane du triangle. Elle coupe donc [OA] en son milieu.
On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Or, $\cos^2(\frac{\pi}{3})+\sin^2(\frac{\pi}{3})=1$
Soit :
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2(\frac{\pi}{3})=1$
$\sin^2(\frac{\pi}{3})=1-\frac{1}{4}$
$\sin^2(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{4}$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



III. Fonctions cosinus et sinus

1. Définition et propriétés :

Définitions :

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe *cos(x)*.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe *sin(x)*.

Propriétés :

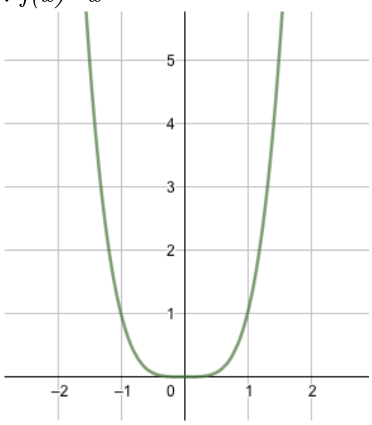
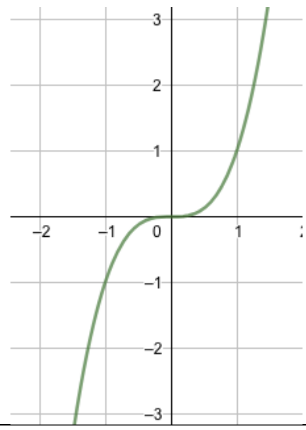
- Périodicité :
  Pour tout réel x : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ pour k entier.
  Remarque :
  On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Conséquence (cf. 2. Courbes représentatives):
Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

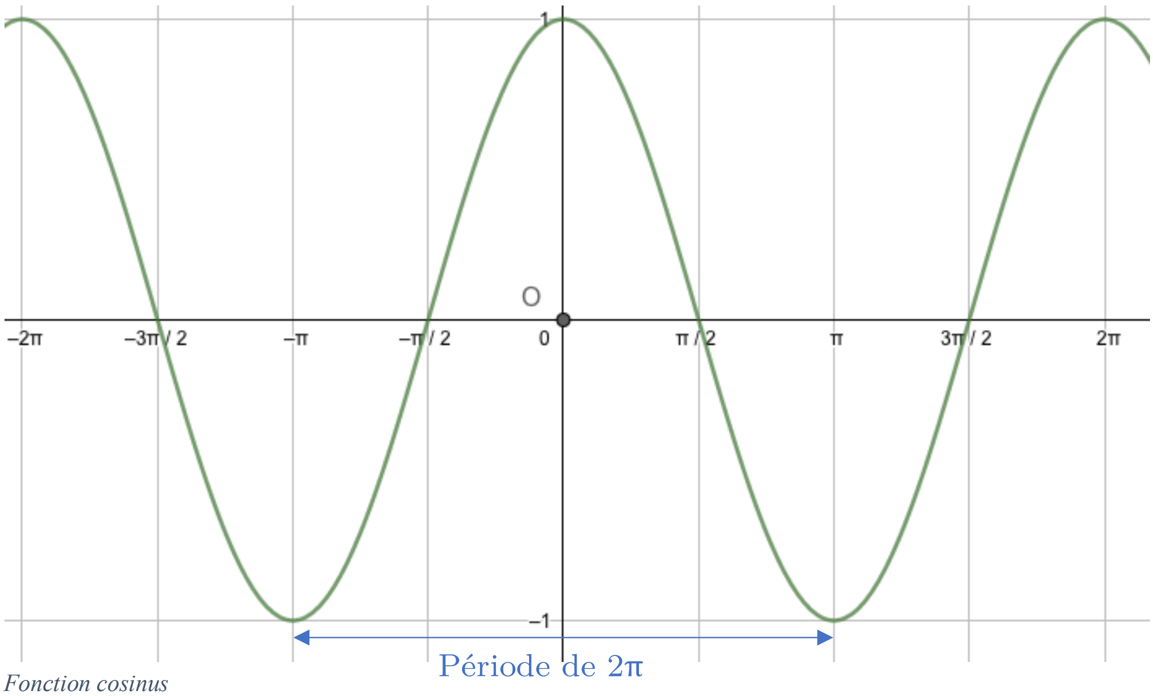
- Parité :
  $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
  Remarque :
  La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

  Conséquences :
  - Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  - Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

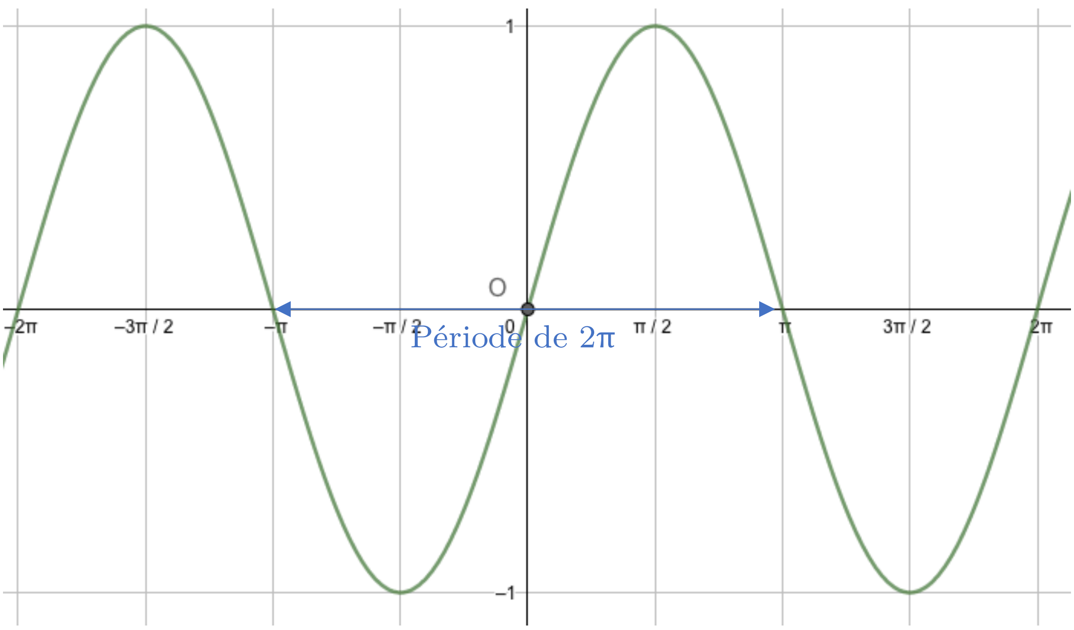
  Rappel parité :

	Fonction paire	Fonction impaire
Définition	Une fonction f , définie sur un ensemble *Df* est <u>paire</u> lorsque : $\forall\, x \in Df$, $f(-x)=f(x)$. *Exemple :* *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^4$ *est paire.* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^4=x^4=f\,(x)$ *Ainsi f est paire.*	Une fonction *f*, définie sur un ensemble *Df* est *impaire* lorsque : $\forall\, x \in Df$, $f(-x)=-f(x)$. Exemple : Montrer que la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3$ est impaire. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^3= (-x)\times(-x)\times(-x)=-x^3$ $=-f\,(x)$ Ainsi *f* est impaire.
Représentation graphique	Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ex. : $f(x)=x^4$ 	Dans un repère quelconque, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère. Ex. : $f(x)=x^3$ 

2. Courbes représentatives



Fonction cosinus



Fonction sinus

3. Tableau de variations

Grâce à la périodicité et à la parité des fonctions cosinus et sinus, nous pouvons les étudier leurs variations uniquement du l'intervalle $[0;\pi]$, puis en déduire leurs comportements sur $[-\pi;0]$ par parité, ce qui nous donne une connaissance sur un intervalle de longueur 2π et enfin, sur $\mathbb{R}$ par translation.

x	0		π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0