Chapitre I

Probabilités conditionnelles et indépendance (2s)

Table des matières

I. Probabilités conditionnelles

a. Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition :
Soit A et B deux évènements de l'univers Ω, A étant de probabilité non nulle ($P(A)\neq 0$).
La probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé, appelée probabilité conditionnelle de B sachant A, est le nombre $P_A(B)$, défini par $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Rappel : $A\cap B$ (intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Ex. :
On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse aux deux évènements suivants :
A : « le nombre obtenu est impair ».
B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 ».
Donc $A\cap B$ est l'évènement : « obtenir un nombre à la fois impair et multiple de 3 ». Il n'y a que 3.
On a $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.
Donc $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\times\frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :
Soit deux évènements A et B tels que $P(A)\neq 0$. Alors :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

Rappel : $\bar{B}$ est l'évènement contraire de B.

Propriété : Probabilité d'une intersection
Si $p(A)\neq 0$, alors $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$.
Si $p(B)\neq 0$, alors $P(A\cap B) = P(B)\times P_B(A)$.

Démonstration :
Ces deux formules se déduisent simplement de la définition de la probabilité conditionnelle.

Rappel :
Probabilité d'une union :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

b. Tableau à double entrée

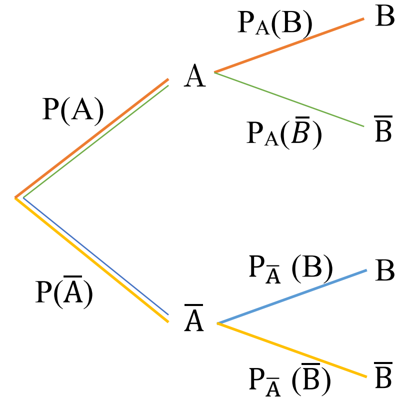
Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles. La probabilité de $A\cap B$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la ligne B.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

II. Arbres pondérés et probabilités totales

a. Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.

1er niveau	2nd niveau	évènement	probabilité
		$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
		$A \cap \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$
		$\overline{A} \cap B$	$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$
		$\overline{A} \cap \overline{B}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

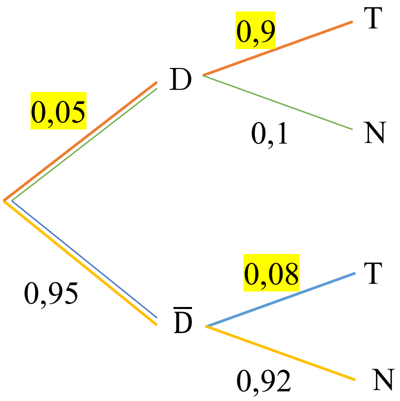
Propriété : Règle du produit
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Propriété : Règle de la somme
La probabilité d'un évènement s'obtient en effectuant la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

Méthode : Construction d'un arbre pondéré et calcul de probabilité d'intersection

A l'issue d'une compétition, des cyclistes passent un contrôle anti-dopage.
On estime que 5% des cyclistes sont dopés. On sait aussi, avec le test utilisé, qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas, alors qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas (faux positif).
On choisit au hasard un des cyclistes de la compétition que l'on soumet au test anti-dopage.
On considère les évènements :
D : « Le sportif choisi est dopé »,
T : « Le sportif choisi a un test positif »,
N : « Le sportif choisi a un test négatif ».
1. Décrire cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité de choisir un sportif dopé ayant un test négatif.

Correction :
1. La phrase « On estime que 5% des cyclistes sont dopés » donne la probabilité de l'évènement D soit P(D)=0,05.
On en déduit que $P(\overline{D})=1-P(D)=1-0,05=0,95$.
De la phrase « qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90% des cas », on en déduit $P_D(T)=0,9$.
De la phrase « qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8% des cas », on en déduit $P_{\overline{D}}(T)=0,08$.



2. $P(D \cap N) = P(D) \times P_D(N) = 0{,}05 \times 0{,}1 = 0{,}005$. *Soit 0,5% de chances de choisir un sportifs dopés qui aura un test positif.*

b. Formules des probabilités totales

Définition : Partition de l'univers
Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles, et dont la réunion est Ω.

Rappel :
Deux évènements sont incompatibles si leur intersection est l'ensemble vide et donc la probabilité de leur intersection est nulle.

Propriété :
On considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω.
Pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

C'est-à-dire :

$$P(B) = P_B(A_1) \times P(B) + P_B(A_2) \times P(B) + \cdots + P_B(A_n) \times P(B)$$

Cas particulier :
A et B étant 2 évènements, on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Méthode :

Soient A et B deux évènements.
On sait que $\mathrm{P(A)} = 0{,}4, \mathrm{P_A(B)} = 0{,}7 \text{et} \mathrm{P_{\bar{A}}(B)} = 0{,}9$. Calculer P(B).

Correction :
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}9 \times (1 - 0{,}4) = 0{,}82.$$

III. Probabilités et indépendance

Dans l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B de probabilité non nulle. Si $P_A(B)=P(B)$, c'est-à-dire que si la réalisation ou non de l'évènement A ne modifie pas la probabilité de B, on dit que l'évènement B est indépendant de l'évènement A.

Propriétés :

- Soit deux évènements de probabilité non nulle. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (1) $P_A(B)=P(B)$;
  - (2) $P_B(A)=P(A)$;
  - (3) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.
- Deux évènements A et B sont indépendant si, et seulement si : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Méthode : Étudier l'indépendance de deux évènements
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les évènements suivants :
A : « la carte tirée est un carreau », B : « la carte tirée est un roi » et C : « la carte tirée est rouge ».
1. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Correction :
1. Le jeu contient 8 carreaux, quatre rois et seize cartes rouges. La carte étant tirée au hasard, on a :
$P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ *et* $P(C)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.
$A\cap B$ est l'évènement : « la carte tirée est un roi de carreau ».
On a donc $P(A\cap B)=\frac{1}{32}$.
De plus, $P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$. *Ainsi on a* $P(A\cap B)= P(A)\times P(B)$.
Les évènements A et B sont indépendants.
2. $A\cap C$ est l'évènement : «la carte tirée est un carreau et une carte rouge ».
Donc : $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$.
D'autre part, $P(A)\times P(C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.
Ainsi, $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$.
Les évènements A et C ne sont pas indépendants.