Chapitre II

Second degré

Table des matières

I. Fonction polynôme du second degré et forme canonique

1. Définition

Définition :

Une fonction f est appelée **fonction polynôme du second degré** lorsqu'il existe trois nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$, tels que pour tout nombre réel x, on puisse écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme est appelée la **forme développée** de f.

Remarque :

Dans toute la suite de ce chapitre, $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$

2. Forme canonique

Propriété :

Toute fonction polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

Cette forme est appelée **forme canonique de f**.

Remarque : à partir de la forme canonique, on constate que $f(\alpha) = \beta$.

Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

or :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

D'où :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

En développant puis réduisant :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$= a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Méthode : Mise sous forme canonique

Mettre sous forme canonique l'expression suivante : $2x^2 - 6x - 8$

Correction

Nous allons tout d'abord mettre le coefficient de x^2 en facteur (si le coefficient est 1, pas besoin de cette étape). Conseil : bien le faire apparaitre dans chacun des termes.

$$2x^2 - 6x - 8 = 2x^2 - 2 \times 3x - 2 \times 4 = 2(x^2 - 3x - 4)$$

Nous allons travailler sur la parenthèse désormais. Nous devons trouver de quelle identité remarquable sont tirés les 2 premiers termes de notre parenthèse $(x^2 - 3x)$.

Ici, nous reconnaissons le début de l'identité : $(x - \frac{3}{2})^2$. *En effet,* $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 2 \times 1 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$.

On a donc : $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ *ou encore :* $x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

Nous allons remplacer dans la parenthèse, x^2-3x *par* $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

$2x^2-6x-8=2(x^2-3x-4)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{25}{4}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$.

Nous avons fini notre mise sous forme canonique. Nous avons $\alpha=\frac{3}{2}$ *et* $\beta=-\frac{25}{2}$.

II. Équation du second degré

1. Définitions :

Définitions :

- Soit f une fonction polynôme du second degré. Les racines de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation *f(x)=0.*
- Le nombre réel b^2-4ac, noté Δ (se lit « delta ») est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.

2. Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

Propriété :

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, où a est un réel différent de 0.

- Si $\Delta>0$: l'équation du second degré a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta=0$: l'équation du second degré a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta<0$: l'équation du second degré n'a pas de solution réelle.

Démonstration :

- *si* $\Delta>0$ *: on reconnaît une identité remarquable :*
$$a\left\{\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2}\right\}=0$$
$$\Leftrightarrow a\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ car } a\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ avec } a\neq 0$$
- *si* $\Delta=0$ *: l'équation s'écrit*
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
Comme un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul, et que $a\neq 0$, *il vient :* $x=-\frac{b}{2a}$. *Cette racine est dite* <u>*double*</u>.
- *si* $\Delta<0$ *: il vient :* $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$
Et par conséquent : $\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ *puisqu'un carré est toujours positif ou nul.*
Comme $a\neq 0$, *on en déduit qu'il n'y a pas de solutions à cette équation (cette expression ne peut être égale à 0 car elle est strictement supérieur à 0 !).*

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $2x^2 + 3x + 10 = 0$

Correction

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

a = 2, b = -1 et c = -6 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$ donc $= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 + 3x + 10 = 0$:

a = 2, b = 3 et c = 10 donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 10 = -71$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Conséquence : Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. Propriété sur la somme et le produit des racines d'un polynôme du second degré

Propriété :

Dans le cas où $\Delta > 0$, x_1 et x_2 étant les deux racines de f :

- La somme des racines est égale à :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Le produit des racines est égal à :

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

- Il vient alors : $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P)$

4. Signe d'un polynôme du second degré

Remarque préliminaire :

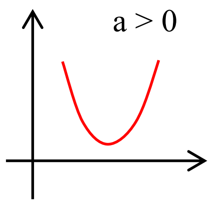
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

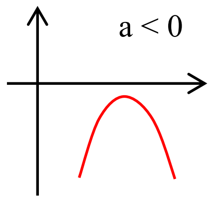
- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

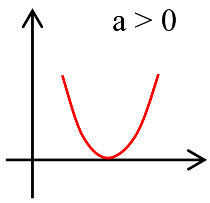


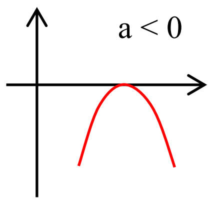


L'équation $f(x)$=0 n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

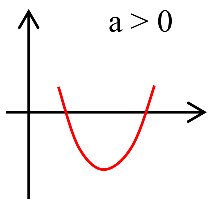


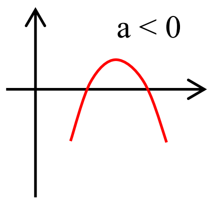


L'équation $f(x)$=0 a une solution unique donc la courbe de f admet son extremum sur l'axe des abscisses.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a





L'équation $f(x)$=0 a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux points.

Conséquence : Nous allons pouvoir résoudre les inéquations du second degré en nous servant de ces tableaux de signes.

Méthode : Résoudre une inéquation

Résoudre l'inéquation suivante : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

Correction :
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier le signe du trinôme.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 3x - 5 + x - 2 < 0$ soit $x^2 + 4x - 7 < 0$

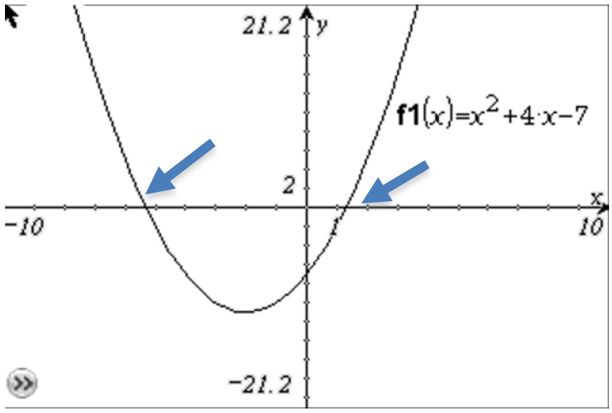
Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $]-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11}[$.

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

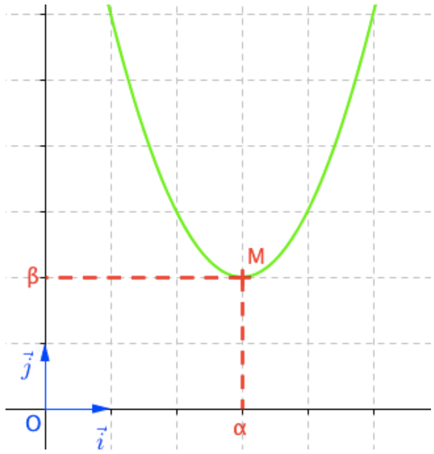


III. Variations et représentation graphique de la fonction polynôme de degré 2

<u>Propriété :</u>
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.
- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

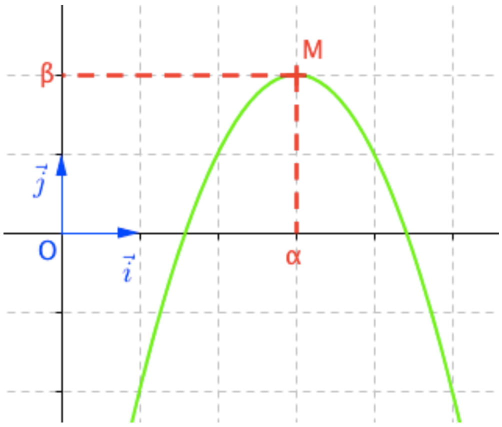
- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗



- Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘



Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une <u>parabole</u>.

M est le sommet de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.
La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite d'équation $x = \alpha$.

Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Trouver la forme canonique de f.

2) Représenter graphiquement la fonction f.

Correction

1) f est une fonction polynôme du second degré avec a=-1, b=4 et c=0.

Donc f(x) peut se mettre sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ *avec* $\alpha = -\frac{b}{2a}$ *et* $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

On a donc :

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-1)} = -2$ *et* $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{4^2-4\times(-1)\times 0}{4\times(-1)} = 4$

D'où la forme canonique de f : $f(x)= -(x^2-2)^2+4$

2) On a donc $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

f admet donc un maximum pour $x = 2$. *Ce maximum est égal à égal à 4.*

Il est possible de le vérifier : $f(2)=-(2-2)^2+4=4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

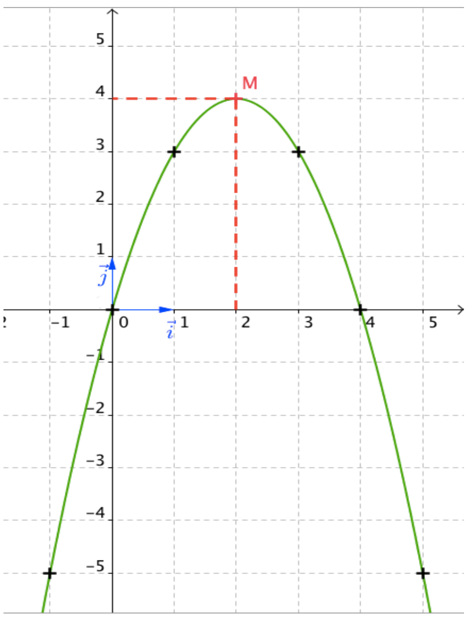
Tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

Tableau de valeurs :

x	*-1*	*0*	*2*	*3*	*4*	*5*
f(x)	*-5*	*3*	*4*	*3*	*0*	*-5*

On obtient la courbe représentative de f :

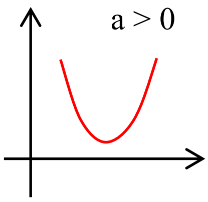


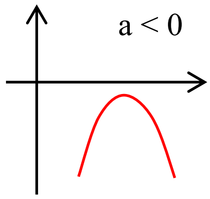
A imprimer :

<u>Propriété :</u> Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

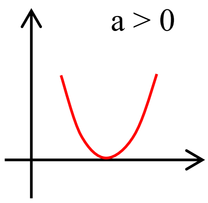


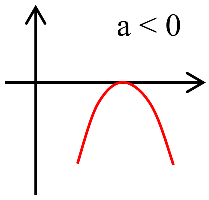


L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

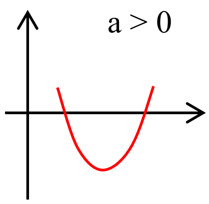


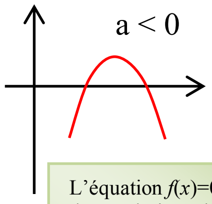


L'équation $f(x)=0$ a une solution unique donc la courbe de f admet son extremum sur l'axe des abscisses.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a





L'équation $f(x)=0$ a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux points.

<u>Propriété :</u> Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

L'équation $f(x)=0$ a une solution unique donc la courbe de f admet son extremum sur l'axe des abscisses.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

L'équation $f(x)=0$ a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux points.