Chapitre VI
Dérivation et variations de fonction

Table des matières

I. Fonction dérivée et opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Propriété :
Si f est une fonction dérivable en tout point a d'une intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée la fonction dérivée de f, noté f'. Ainsi, $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple :
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x$ et soit a un réel. Pour $h \neq 0$,
$r(h) = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$.
On a donc $\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} 1 = 1$.
La fonction g est donc dérivable en toute valeur a de $\mathbb{R}$ et $g'(a)=1$.
Donc la fonction dérivée g' est définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x)=1$.

2. Dérivée de fonctions usuelles

Lien vidéo : lien

Fonction	**La fonction définie par …**	**… est dérivable pour tout réel a appartenant à …**	**… de nombre dérivé $f'(x)$ égal à …**
Constante	$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	0
Identité	x	$\mathbb{R}$	1
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
Cube	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
Puissance	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
Inverse d'une puissance	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration : fonction dérivée de la fonction carré et de la fonction inverse

- *Fonction carré :*

Si $f(x)=x^2$, alors $r(h) = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$.
On a donc $\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} (2a+h) = 2a$.
Donc f est dérivable en a et $f'(a)=2a$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x)=2x$.

- *Fonction inverse :*

Soit $a \neq 0$ *et* $h \neq 0$ *tel que* $a+h \neq 0$.

Alors $f(a+h)-f(a)=\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}=\frac{-h}{a(a+h)}$.
Ainsi, $r(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$.
Par conséquent, $\lim\limits_{h\to 0} r(h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right)=-\frac{1}{a(a+0)}=-\frac{1}{a^2}$.
Donc f est dérivable en a et f'(a)== $-\frac{1}{a^2}$.
Ainsi, pour tout réel x, f'(x) $=-\frac{1}{x^2}$.

3. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriétés :

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un réel	$\lambda\times u$	$\lambda\times u'$
Produit	$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
Inverse	$\frac{1}{v}$ $avec\ v(x)\neq 0\ pour\ tout\ x\in I$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$ $avec\ v(x)\neq 0\ pour\ tout\ x\in I$	$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

Démonstration : fonction dérivée d'un produit

$$\begin{aligned}r(h)&=\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\\&=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\frac{v(a+h)[u(a+h)-u(a)]+u(a)[v(a+h)-v(a)]}{h}\\&=v(a+h)\frac{[u(a+h)-u(a)]}{h}+u(a)\frac{[v(a+h)-v(a)]}{h}\end{aligned}$$

Or u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{[u(a+h)-u(a)]}{h}=u'(a)$.
De même, v est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{[v(a+h)-v(a)]}{h}=v'(a)$

En passant à la limite quand h tend vers 0 :
$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ *tend vers* $u'(a)$ *et* $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ *tend vers* $v'(a)$

On en déduit donc :

$$\lim_{h\to 0} r(h)=\lim_{h\to 0}\ v(a+h)\frac{[u(a+h)-u(a)]}{h}+u(a)\frac{[v(a+h)-v(a)]}{h}=v(a)\times u'(a)+u(a)\times v'(a).$$

Ainsi u est dérivable en a et (uv)'(a)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a).
Donc uv est dérivable sur I et (uv)'=u'v+uv'.

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction polynôme, d'un produit et d'un quotient

- Fonction polynôme :

Calculer la dérivée de la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=4x^3-5x^2+2x-1$.

Correction :
On a $f(x)=h(x)+i(x)+j(x)+k(x)$, *avec* $h(x)=4x^3$, $i(x)=-5x^2$, $j(x)=2x$ *et* $k(x)=-1$.
Ainsi, $f'(x)=h'(x)+i'(x)+j'(x)+k'(x)$ *avec* $h'(x)=4\times 3x^2=12x^2$, $i'(x)=-5\times 2x=-10x$, $j'(x)=2$ *et* $k'(x)=0$.

Par conséquent, pour tout réel x, f'(x)= $12x^2 - 10x + 2$.

De façon pratique, nous ferons une rédaction plus allégée et nous pourrons écrire :

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 = 12x^2 - 10x + 2$$

- Produit de fonctions :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

Correction :

On remarque que $f(x) = u(x) \times v(x)$ *avec u(x)=x et v(x)=*$\sqrt{x}$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et la fonction v est dérivable sur* $]0\,;\,+\infty[$.

Ainsi, par produit, f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

u'(x)=1 et v'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x}^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

- Quotient de fonctions :

Soit f la fonction définie pour tout x>2 par $f(x) = \frac{4x+5}{-3x+6}$.

Déterminer l'expression de *f'*.

Correction :

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, *avec u(x)=4x+5 et v(x)=-3x+6.*

Ces deux fonctions sont dérivables sur $]2\,;\,+\infty[$ *et v(x)≠0 sur cet intervalle. f est donc dérivable sur* $]2\,;\,+\infty[$.

u'(x)=4 et v'(x)=-3.

On a donc : $f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} = \frac{4(-3x+6)-(4x+5)\times(-3)}{(-3x+6)^2} = \frac{-12x+24+12x+15}{(-3x+6)^2} = \frac{39}{(-3x+6)^2}$.

II. Applications de la dérivation : lien entre sens de variation et signe de la dérivée

1. Variations d'une fonction

Propriétés (admises) :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I et sa dérivée *f'* sur I.

(1) Si pour tout réel x de I, on a $f'(x) \geq 0$ sur I, alors *f* est croissante sur I.

(2) Si pour tout réel x de I, on a $f'(x) \leq 0$ sur I, alors *f* est décroissante sur I.

Réciproquement :

(1) Si f est croissante sur I, alors, pour tout réel x de I, on a $f'(x) \geq 0$.

(2) Si f est décroissante sur I, alors, pour tout réel x de I, on a $f'(x) \leq 0$.

Conséquence :
Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, il suffit d'étudier le signe de sa fonction dérivée sur I. Pour cela, on procède ainsi :

1) Calcul de la fonction dérivée f'
2) Étude du signe de $f'(x)$ sur I
3) Construction du tableau de variations :

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

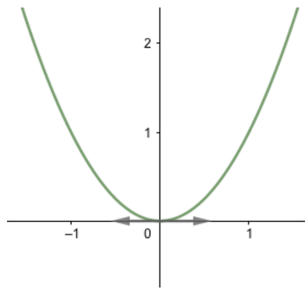
2. Extremums d'une fonction

Définition :
Un extremum est soit un minimum, soit un maximum.

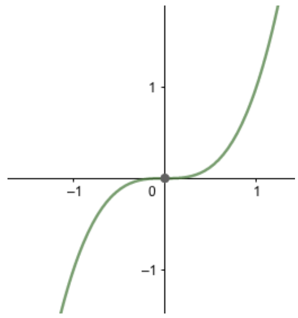
Propriété (admise) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

Ex. :

- La fonction carré a une dérivée qui s'annule en 0 en changeant de signe puisque $f'(x)=2x$, donc f admet un extremum local en 0.



- La fonction cube a une dérivée qui s'annule en 0 mais ne change pas de signe en 0 ($g'(x)=3x^2$). La fonction cube n'admet donc pas d'extremum local en 0.



3. Méthode : étude des variations d'une fonction

Déterminer les variations, le minimum et le maximum de la fonction f définie sur $[-2\,;3]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$$

Correction:

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 \times 1 + 0$$
$$= 6x^2 - 6x - 12$$

Étudions le signe de cette dérivée :

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324 = 18^2$

$$x_1 = \frac{6 - 18}{2 \times 6} = -1$$

$$x_2 = \frac{6 + 18}{2 \times 6} = 2$$

D'où le tableau de signes :

x	-2		-1		2		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	2	$\nearrow$	13	$\searrow$	-14	$\nearrow$	-3

Car $6 > 0$

Enfin, on n'oublie pas de calculer les images de -2 ; -1 ; 2 ; et 4 par f et on complète le tableau.

<u>Conclusion</u> :

- *Le minimum de cette fonction vaut -14 ; il est atteint en $x = 2$.*
- *Le maximum de cette fonction vaut 13 ; il est atteint en $x = -1$.*