Chapitre VII
Fonction exponentielle

Table des matières

I. Définition de la fonction exponentielle

Lien cours : [lien]() et lien vers exercices corrigés : [lien]()

1. Définition et propriétés

Définition:
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée la **fonction exponentielle** et est notée : $f(x) = exp(x)$.

L'existence d'une telle fonction est admise. Nous allons démontrer son unicité ci-dessous.

Exercice : Démonstration de l'unicité de la fonction *exp*.

1. On veut démontrer que la fonction f ne s'annule pas.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.
    a. Montrer que pour tout réel *x*, *h'(x)=0* (*aide* : $\left(f(-x)\right)' = -f'(-x)$).
    b. En déduire que pour tout réel *x*, *h(x)=1*.
    c. Montrer que f ne s'annule par sur $\mathbb{R}$. (Avec un raisonnement par l'absurde...)

2. On démontre maintenant l'unicité de *f*.
Soit g une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
    a. Montrer que la fonction $\frac{g}{f}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
    b. En déduire que $f = g$.

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition de la fonction exponentielle.

Correction :
1.
a. Pour le calcul de h'(x), on va utiliser la formuler : $\left(u(x) \times v(x)\right)' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.
$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (f(-x))' = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = 0$
b. comme h'(x)=0 pour tout x de $\mathbb{R}$*, h est une fonction constante.*
On a $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$.
Donc, pour tout réel x, h(x)=1.
c. Par l'absurde nous allons supposer qu'il existe un réel a tel que f(a)=0.
Donc, $h(a) = f(a) \times f(-a) = 0 \times f(-a) = 0$.
Absurde, donc notre hypothèse de départ est fausse...

2.
a. Calculons la fonction dérivée de $\frac{g}{f}$ *:*

Car f=f' et g=g'

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} = \frac{0}{(f(x))^2} = 0$$

Donc, la fonction $\frac{g}{f}$ *est une fonction constante.*

$$\frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc, pour tout réel x, $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$.
b. Comme $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ *on a g(x)=f(x).*
La fonction f est donc unique.

Propriétés :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $exp\ '(x) = exp\ (x)$.
- $exp(0) = 1$.

Propriétés :

Pour tous réels x et y, et pour tout entier n, on a :

Relations fonctionnelles :

- $exp(x + y) = exp\ (x) \times exp\ (y)$
- $exp(-x) \times exp(x) = 1 \qquad donc \qquad exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$

Démonstrations :

- *Pour tout* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, $\exp\ (\mathrm{x}) \neq 0$, *posons donc :* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\exp\ (\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\exp\ (\mathrm{x})}$.

  Pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, *on a :* $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\exp(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \exp(\mathrm{x}) - \exp\ (\mathrm{x}+\mathrm{y}) \exp\ (\mathrm{x})}{(\exp\ (\mathrm{x}))^2} = 0$.

  Comme la dérivée est nulle, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

  On a $\mathrm{f}(0) = \frac{\exp(0+\mathrm{y})}{\exp(0)} = \exp\ (\mathrm{y})$.

  Donc pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, $\frac{\exp\ (\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\exp\ (\mathrm{x})} = \exp\ (\mathrm{y})$, *d'où* $\exp(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \exp\ (\mathrm{x}) \times \exp\ (\mathrm{y})$.

- *En utilisant la propriété précédente :*

  $\exp(\mathrm{x}) \times \exp(-\mathrm{x}) = \exp(\mathrm{x}-\mathrm{x}) = \exp(0) = 1$.

Conséquences :

- $exp\ (x) \neq 0$
- $exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $exp(nx) = (exp(x))^n$

2. La notation e^x

Définition :

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e, c'est-à-dire $\exp(1) = e \approx 2{,}718281828$.

On appelle ce nombre le « nombre d'Euler » ou encore « constante de Néper ».

Notation :

Soit x un réel. On note e^x l'image de x par la fonction exponentielle : $exp(x)=e^x$.

On réécrit les propriétés de la fonction exponentielle avec cette nouvelle notation.

Propriétés :

Pour tous réels a et b et tout entier n :

(1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ (2) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ (3) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ (4) $e^{na} = (e^a)^n$

Ex. :

$e^2 \times e^5 = e^7$; $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$; $\frac{e^9}{e^6} = e^{9-6} = e^3$; $(e^5)^8 = e^{5\times 8} = e^{40}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe

Propriété :
Pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{e^x > 0}$.

Démonstration :
Pour tout réel x :

$$e^x = e^{\frac{x}{2}\times 2} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Comme un carré est toujours positif, et qu'une exponentielle ne s'annule jamais, le résultat s'ensuit

2. Sens de variation

Propriété :
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0	$+\infty$

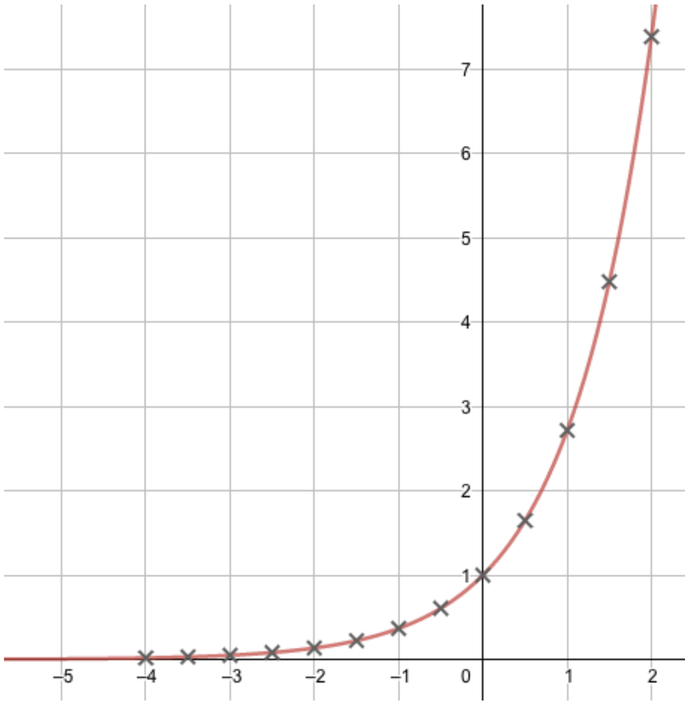
Démonstration :
$f(x) = e^x$ *et* $f'(x) = e^x > 0$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :
Pour tous réels a et b :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad$ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ $\qquad$ $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

3. Représentation graphique

Tracer ici dans un repère orthonormé d'unité 1cm les points de coordonnées (x ;$f(x)$) où x prend pour valeurs tous les nombres compris entre -4 et 2 avec un pas de 0,5.



4. Suite de terme général e^{na}

Propriété :
Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique

Démonstration :
Posons $u_n = e^{na}$*. Alors*

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$$

(u_n) *est de la forme* $u_{n+1} = q \times u_n$ *: c'est donc une suite géométrique de raison* $q = e^a$ *et de premier terme* $u_0 = e^0 = 1$.

Voilà pourquoi on dit qu'une suite géométrique a une progression exponentielle.