Chapitre VIII

Géométrie repérée

Table des matières

I. Rappel sur les équations de droites

Critère de colinéarité :
$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Vecteur directeur d'une droite :
Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\vec{u}(-b; a)$.

Propriété :
Les droites d'équation $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur ou de deux points

On considère un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 5)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points B(5 ; 3) et C(1 ; -3).

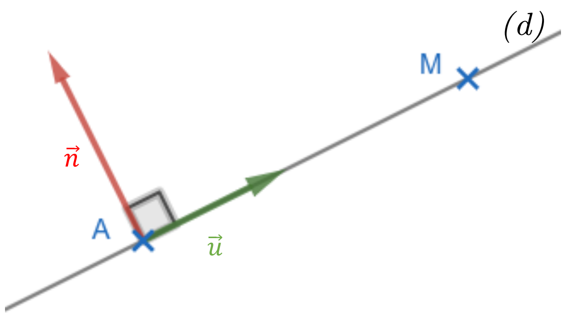
Correction :
1) Soit un point M(x ; y) de la droite d.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-3}{y-1}$ et $\vec{u}\binom{-1}{5}$ sont colinéaires, soit : $5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.
Soit encore : $5x+y-16=0$.
Une équation cartésienne de d est : $5x+y-16=0$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à appliquer le deuxième point énoncé plus haut.
Ainsi, comme $\vec{u}$ (-1 ; 5) est un vecteur directeur de d, une équation de d est de la forme : $5x+1y+c=0$.
Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.
$\overrightarrow{BC}\binom{1-5}{-3-3} = \binom{-4}{-6}$.
Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x+4y+c=0$.
B(5 ; 3) appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.
Une équation cartésienne de d' est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $3x-2y-9=0$ en divisant l'équation précédente par -2.

II. Équation d'une droite à l'aide d'une vecteur normal

Définition :
Un vecteur normal à une droite (d) est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (d), donc à tout vecteur directeur de (d).



Conséquence :
Propriété :
Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$, A un point de (d) et M un point du plan.
M appartient à (d) si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Dit autrement : Si (d) est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors (d) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Propriétés :
Soient a, b, c trois nombres réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
(1) Soit *(d)* une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$, Une équation cartésienne de *(d)* s'écrit $ax+by+c=0$.
(2) Réciproquement, l'équation $ax+by+c=0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

Méthode : Déterminer un vecteur normal à une droite
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les droite (d_1) et (d_2) d'équations respectives $5x-4y+8=0$ et $y=2x+3$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacune de ces droites.

Correction :

- *L'équation de* (d_1) *est donnée sous forme cartésienne* $ax+by+c=0$, *avec* $a=5$ *et* $b=-4$.
  Un vecteur normal à (d_1) *est donc le vecteur* $\overrightarrow{n_1}(5\ ;-4)$.
- *L'équation de* (d_1) *est donnée sous forme réduite, on peut l'écrire sous forme cartésienne :*$2x-y+3=0$.
  On a alors $a=2$ *et* $b=-1$.
  Un vecteur normal à (d_2) *est donc le vecteur* $\overrightarrow{n_2}(2\ ;-1)$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite passant par un point et un vecteur normal
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A(2 ;5) et le vecteur $\vec{n}(3;7)$.

Correction :
Première méthode :
Soit un point M de coordonnées (x ;y).
M appartient à (d) si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.
Or, $\overrightarrow{AM}(x-2;y-5)$ *et* $\vec{n}(3;7)$.
Donc M appartient à (d) si, et seulement si, $(x-2)3+(y-5)7=0$, *ce qui équivaut à* $3x+7y-41=0$.
Une équation de (d) est donc $3x+7y-41=0$.

Deuxième méthode :
Comme (d) à pour vecteur normal et $\vec{n}(3;7)$, *une équation de (d) est donc de la forme* $3x+7y+c=0$.
De plus A est un point de (d), donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).
Donc $3\times 2+7\times 5+c=0$. *On en déduit que* $c=-41$.
Une équation de (d) est donc $3x+7y-41=0$.

III. Équation d'un cercle

Soit A un point. Le cercle de centre A et de rayon r ($r>0$) est l'ensemble des points M, tels que : AM=r. On en déduit la propriété suivante.

Propriété :
Un point M(x ;y) appartient au cercle de centre A(x_A ;y_A) et de rayon r si, et seulement si, $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$.
Cette équation est appelée équation du cercle de centre A et de rayon r.

Démonstration :
Le point M(x ;y) appartient au cercle si, et seulement si, $AM^2=r^2$.
Or $AM^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$, *d'où le résultat.*

Ex. : L'ensemble des points M(x ;y) tels que $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ est le cercle de centre A(3 ;-2) et de rayon 4.

Méthode : Déterminer l'équation d'un cercle en connaissant les coordonnées de son centre et d'un point
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle de centre A(2 ;5) et passant par le point B(2 ;1).
Déterminer une équation de ce cercle.

Correction :
Un rayon de ce cercle est [AB]. Donc le rayon de ce cercle est :
$r^2= (2\text{-}2)^2+(1\text{-}5)^2=0^2+(\text{-}4)^2=16$.
Une équation de ce cercle est : $(x\text{-}2)^2+(y\text{-}5)^2=16$.

Propriété :
Tout cercle a une équation de la forme $x^2+y^2\text{-}2ax\text{-}2by+c=0$ avec $a=x_A$, $b=y_a$ et $c = x_A{}^2+y_A{}^2\text{-}r^2$. ($(x_A\,;y_a)$ étant les coordonnées du centre du cercle et r son rayon.

Propriété :
Si S est un nombre réel, l'ensemble $M(x\,;y)$ des points du plan vérifiant
$(x-a)^2+(y-b)^2=S$ est :

- un **cercle** de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{S}$ si $S>0$;
- le **point** de coordonnées $(a\,;b)$ si $S=0$;
- l'ensemble vide si $S<0$.

Propriété :
En posant $A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$ et $M(x\,;y)$, on déduit une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$:

$$\boldsymbol{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$$

Démonstration :
On l'a déjà vu : le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ *est l'ensemble des points* $\mathrm{M}(\mathrm{x}\,;\mathrm{y})$ *du plan vérifiant* $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$.
Or

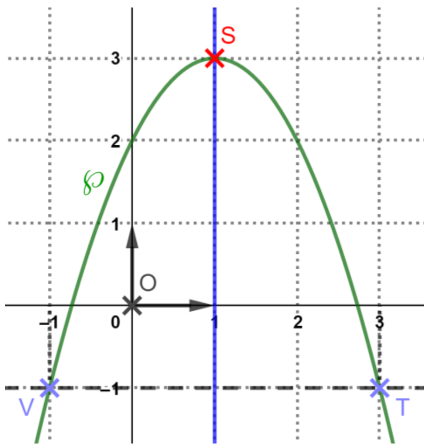
$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{BM}}=0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$$

IV. Équation de parabole

Dans ce paragraphe, soient $a\,;b\,;c$ trois réels tels que $a\neq 0$.
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Propriété :
Pour tout réel x, $\boldsymbol{f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)}$



Propriété :
La parabole représentant la fonction polynôme du second degré f admet un axe de symétrie, parallèle à l'axe des ordonnées.

Une équation de cet axe est :

$$\boldsymbol{x=-\frac{b}{2a}}$$

L'intersection de cet axe de symétrie avec la parabole est un point S, appelé **sommet de la parabole**. Ses coordonnées sont

$$\boldsymbol{\left(-\frac{b}{2a}\,;f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)}$$

Propriété :
Si la fonction f admet pour forme canonique

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

alors l'axe de symétrie de sa parabole a pour équation

$$\boldsymbol{x = \alpha}$$

et son sommet a pour coordonnées

$$(\boldsymbol{\alpha} ; \boldsymbol{\beta}).$$

V. Coordonnées de point d'intersection

Trouver les coordonnées d'un ou des points d'intersection entre 2 courbes revient à trouver l'ensemble des couples de coordonnées *(x ;y)* qui satisfont aux 2 équations des courbes en même temps. Pour cela, nous devront résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues.

Méthode :

- Trouver les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation cartésienne $-x+y-4=0$ et de la parabole d'équation $y=x^2+2x+2$

Correction :
Pour cela, nous devons trouvez les couples (x ;y) solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -x+y-4=0 & (1) \\ y = x^2+2x+2 & (2) \end{cases}.$$

Grâce à l'équation (2), nous avons y qui est exprimé en fonction de x. Nous allons donc remplacer le y dans l'équation (1), par sa valeur de l'équation (2), ie : $y=x^2+2x+2$. On dit que l'on utilise une méthode par substitution.
Ce système est équivalent à (nous pourront utiliser $\Leftrightarrow$) :

$$\begin{cases} -x+x^2+2x+2-4=0 & (1) \\ y = x^2+2x+2 & (2) \end{cases}.$$ *L'équation (1) devient donc une équation du 2^{nd} degré à une inconnue que nous savons résoudre grâce au discriminant…*

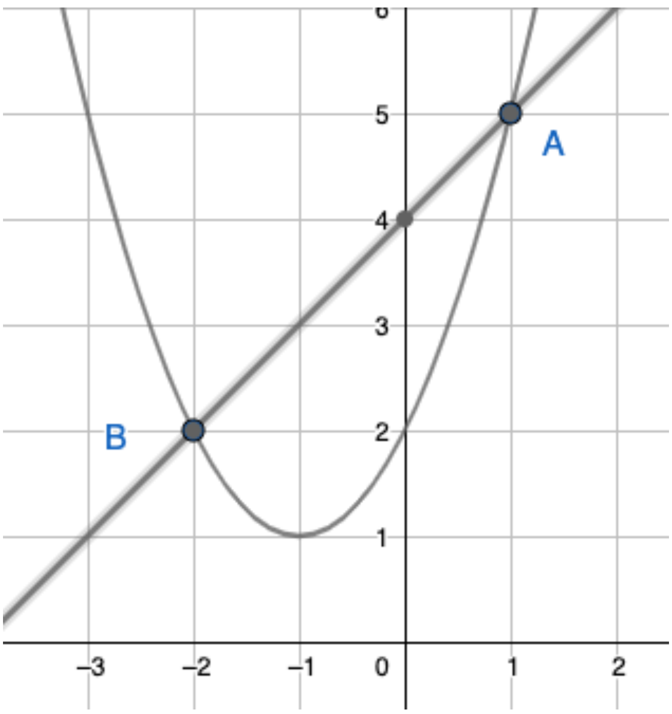
$$\begin{cases} x^2+x-2=0 & (1) \\ y = x^2+2x+2 & (2) \end{cases}$$

Pour l'équation (1) :
$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$. *Il y a donc 2 solutions réelles :*
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$ *et* $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-4}{2} = -2$.

Il ne nous reste plus qu'à trouver les y correspondant, grâce à l'équation (2) par exemple :
$y_1 = 1^2 + 2\times 1 + 2 = 5$ *et* $y_2 = (-2)^2 + 2\times(-2) + 2 = 2$.

Les couples solutions et donc les coordonnées des points d'intersection sont : (1 ; 5) et (-2 ; 2).

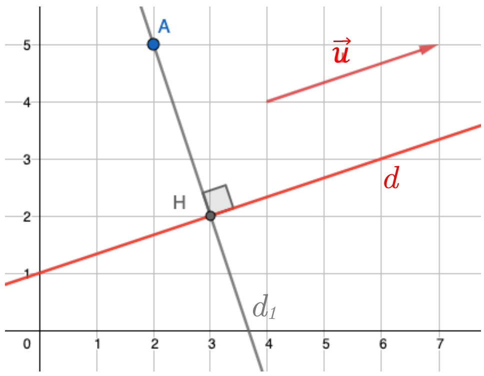
Graphiquement nous retrouvons ces résultats :



- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Dans plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $x-3y+3=0$ et le point A de coordonnées $(2\ ;\ 5)$. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite d.

1. Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à d passant par A.
2. Calculer les coordonnées de H.



Correction :

1. On se retrouve avec la configuration graphique suivante :

Comme d et d_1 sont perpendiculaires, le vecteur $\vec{u}(3;1)$ qui est un vecteur directeur de d, est un vecteur normal à d_1.

Une équation de d_1 est donc de la forme $3x+y+c=0$.

Or, A est un point de d_1 donc $3x_A+y_A+c=0$

Soit $3 \times 2 + 5 + c = 0$,

Soit $c=-11$.

Une équation de d_1 est donc : $3x+y-11=0$.

2. H est le point d'intersection de d_1 et de d.

Ses coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 & (1) \\ 3x + y - 11 = 0 & (2) \end{cases}$.

Grâce à l'équation (1) nous allons exprimer x en fonction de y puis injecter cette valeur dans l'équation (2).

Ce système est équivalent à $\begin{cases} x = 3y - 3 & (1) \\ 3x + y - 11 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 3 & (1) \\ 3(3y - 3) + y - 11 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 3 \\ 10y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 3 \\ y = \frac{20}{10} = 2 \end{cases}$.

On remplace la valeur trouvée de y dans l'équation (2) dans (1) qui nous donne : $x = 3y - 3 = 3 \times 2 - 3 = 3$.

Les coordonnées de H sont $(3\ ;\ 2)$.