Chapitre III
Suites

Contenus
Les suites comme modèles mathématiques d'évolutions discrètes :
- différents modes de génération d'une suite numérique ;
- sens de variation ;
- représentation graphique : nuage de points $(n,u(n))$.

Les suites arithmétiques comme modèles discrets d'évolutions absolues constantes (croissance linéaire) et les suites géométriques (à termes strictement positifs) comme modèles discrets d'évolutions relatives constantes (croissance exponentielle) :
- relation de récurrence ;
- sens de variation ;
- représentation graphique.

Capacités attendues
- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Reconnaître si une situation relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.
- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison

Table des matières

I. Suites numériques : généralités et modes de génération d'une suite

1. Généralités

Définition :
Une suite numérique est une liste ordonnée et numérotée de nombres.
Généralement, elle est numérotée à partir de 0 ou de 1.
Les éléments de cette liste sont appelés les **termes**.
Le numéro de chaque terme est appelé son **indice** (généralement n).
Le **rang** d'un terme est sa place dans la liste.

Remarque :
Attention, le rang et l'indice ne sont pas forcément identique :
Si u est la liste {1 ; 3 ; -1 ; 4 ; …} numérotée à partir de 0, on a donc $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = -1, \ldots$
Ainsi, 3 est le terme d'indice 1 mais de rang 2 (c'est le 2ème terme dans la suite).
Donc méfiance quand une suite commence à 0…

2. Modes de génération d'une suite

2.a. Explicite

La suite (u_n) est définie par une relation $u_n=f(n)$ où f est une fonction de la variable n.

Conséquences :

- Quand une suite est définie explicitement, on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement.
- On pourra appliquer tous les outils que nous connaissons sur les fonctions comme l'étude des signes, des variations, …

Ex. :
Considérons la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2+3n$.
On peut calculer ainsi :
$u_0 = 0^2 + 3 \times 0 = 0$, $u_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$, $u_{100} = 100^2 + 3 \times 100 = 10300$

2.b. Par relation de récurrence

Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Ainsi :

$$\begin{cases} v_{n+1} = g(v_n) \\ v_0 = \cdots \end{cases}$$

Pour calculer la valeur d'un terme de la suite, il faut donc forcément connaître tous les termes précédents.

Méthode : Calculer le terme d'une suite définie par une relation de récurrence
On donne $\begin{cases} v_{n+1} = 3 - 2v_n \\ v_0 = 0 \end{cases}$.
Calculer le terme de rang 5 de cette suite (donc le 5ème terme de la suite !).

Correction :

$$v_1 = v_{0+1} = 3 - 2v_0 = 3 - 2 \times 0 = 3$$

$$v_2 = v_{1+1} = 3 - 2v_1 = 3 - 2 \times 3 = -3$$

$$v_3 = v_{2+1} = 3 - 2v_2 = 3 - 2 \times (-3) = 9$$

$$v_4 = v_{3+1} = 3 - 2v_3 = 3 - 2 \times 9 = -15$$

Remarque : Avec ce type de suite, on n'a **pas immédiatement** accès à n'importe quel terme, puisqu'il faut avoir au préalable calculer tous les termes précédents avant d'avoir accès à v_{100} par exemple.

2.c. Par un algorithme

La suite (u_n) est alors défini par son premier terme et des instructions d'une boucle Pour, qui permettent de calculer les termes suivants.

Ex. :
On considère la suite (u_n) de la méthode précédente. L'algorithme suivant permet de calculer le terme de rang N de cette suite.
La valeur u_0 est entrée dans la variable A

$A \leftarrow 0$
Pour i variant de 1 à N
 $|A \leftarrow 3 - 2 \times a$
Fin Pour

2.d. Par une représentation graphique

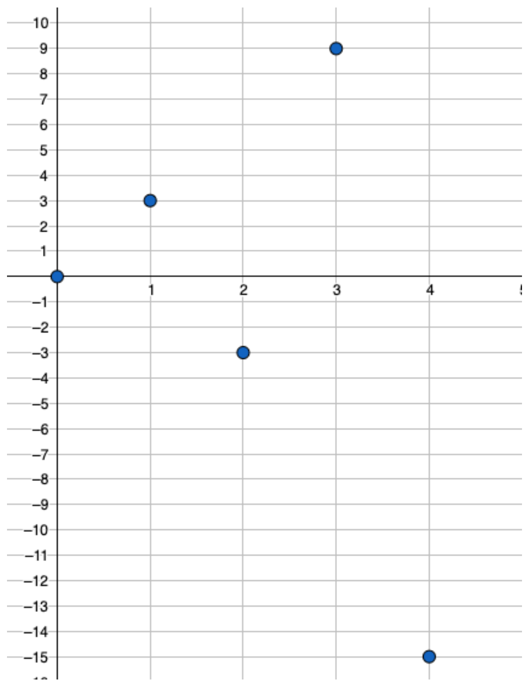
Pour représenter graphiquement une suite u dans un repère, on place :

- les indices n sur l'axe des abscisses ;
- les termes $u(n)$ sur l'axe des ordonnées ;
- les points de coordonnées $(n\ ;u(n))$ dans un repère, sans les relier !

Ex. :
Si on prend la suite de la méthode précédente :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 3 - 2v_n \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

On avait trouvé :
$v_1 = 3\ ;\ v_2 = -3\ ;\ v_3 = 9$ et $v_4 = -15$.
Nous devons donc placer dans un repère les points de coordonnées :
(0 ;0), (1 ;3), (2 ;-3), (3 ;9) et (4 ;-15).
Cela donne le graphique ci-contre.



II. Sens de variations d'une suite

Définition :
Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier n :

$$u_{n+1} > u_n$$

Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier n :

$$u_{n+1} < u_n$$

Une suite (u_n) est **monotone** si lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Conséquence :
Pour étudier les variations d'une suite, nous allons avoir à notre disposition 3 méthodes à utiliser selon le type de suite que nous étudions.

- Méthode 1 : il suffit d'**étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$** :
  - Si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante ;

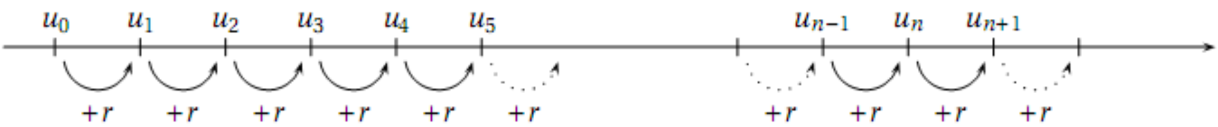
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante.

- Méthode 2 : si la suite est définie explicitement, du type $u_n = f(n)$, il suffit d'**étudier les variations de la fonction f**.

- Méthode 3 : si tous les termes de la suite sont strictement positifs (attention : il faut l'avoir justifié avant d'appliquer cette méthode), il suffit de **comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1** :
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante ;
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est strictement décroissante.

III. Suites arithmétiques

Définition :
Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante réel r, appelée la raison, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$



Ex. :
La suite 1 ;5 ;9 ;13 ;... est une suite arithmétique de raison 4.

Conséquences :
- Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si, et seulement si, $r>0$.
- Une suite arithmétique de raison r est strictement décroissante si, et seulement si, $r<0$.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de $\boldsymbol{n}$**. Cette constante sera alors la raison de la suite (u_n).

Propriété :
Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r est :

$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Démonstration :

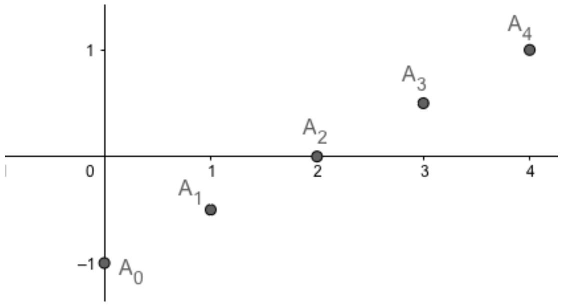
$$\begin{array}{c} \cancel{u_1} = u_0 + r \\ \cancel{u_2} = \cancel{u_1} + r \\ \cancel{u_3} = \cancel{u_2} + r \\ \dots \\ \cancel{u_{n-1}} = \cancel{u_{n-2}} + r \\ u_n = \cancel{u_{n-1}} + r \end{array}$$

- *On écrit la relation de récurrence pour i=0, i=1, ... jusqu'à i=n-1.*
- *La somme de tous les membres de gauche et égale à la somme de tous les membres de droite.*
- *Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient.*
- *On obtient l'égalité : $u_n = u_0 + n \times r$.*

Conséquence :
On remarque qu'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, peut s'écrire sous forme explicite : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = u_0 + rx$. Nous reconnaissons ici une fonction affine.

Propriété :
Lorsque la suite (u_n) est arithmétique les points $A_n(n; u_n)$ sont alignés.

Ex. :
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 =-1 et de raison $r = \frac{1}{2}$.
Alors pour tout entier n, $u_n = -1 + \frac{1}{2}n$. Les points $A_n(n; u_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Méthode : Donner la nature d'une suite, sa raison et son sens de variation
Soit la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2 + 4n$.
Montrer que cette suite est arithmétique en précisant sa raison et son premier terme.
En déduire son sens de variation.

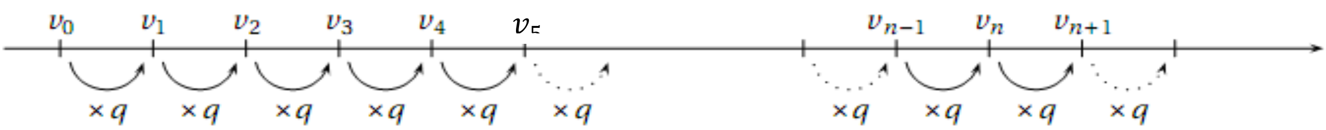
Correction :
Pour montrer que c'est une suite arithmétique, nous allons étudier le résultat de $u_{n+1} - u_n$.
On sait que $u_n = -2 + 4n$, donc $u_{n+1} = -2 + 4(n+1) = -2 + 4 \times n + 4 \times 1 = -2 + 4n + 4 = 4n + 2$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = 4n + 2 - (-2 + 4n) = 4n + 2 + 2 - 4n = 4$.
(Remarque : bien mettre des parenthèses pour u_n afin d'inverser les signes à causes du « - » devant !)
On obtient un nombre indépendant de n, c'est donc une suite arithmétique de raison 4.
Le premier terme est ici $u_0 = -2 + 4 \times 0 = -2$.

La raison 4 étant strictement positive, la suite est strictement croissante.

IV. Suites géométriques

Définition :
Une suite (v_n) est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante réel q, appelée la raison, c'est-à-dire lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.



Ex. :
La suite 1 ;6 ;36 ;216 ;... est une suite géométrique de raison 6.

Conséquences :
- Une suite géométrique de raison q>1 est strictement croissante.
- Une suite géométrique de raison q avec 0<q<1 est strictement décroissante.
- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, puis on montre que cette quantité est égale à une **constante indépendante de n**. Cette constante sera alors la raison de la suite (v_n).

Propriété :
Le terme général d'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0 est :
$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$$

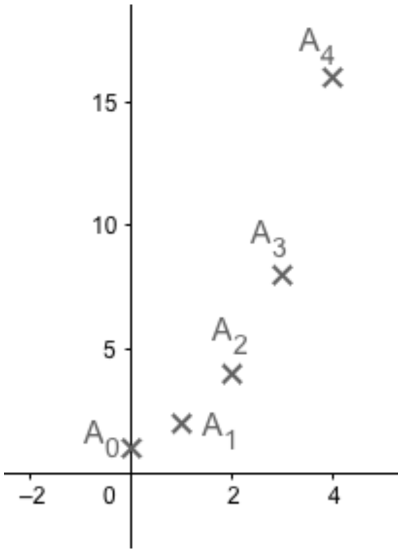
Démonstration :

$$\cancel{v_1} = v_0 \times q$$
$$\cancel{v_2} = \cancel{v_1} \times q$$
$$\cancel{v_3} = \cancel{v_2} \times q$$
$$\dots$$
$$\cancel{v_{n-1}} = \cancel{v_{n-2}} \times q$$
$$v_n = \cancel{v_{n-1}} \times q$$

- *On écrit la relation de récurrence pour i=0, i=1, … jusqu'à i=n-1.*
- *Le produit de tous les membres de gauche et égale au produit de tous les membres de droite.*
- *Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient.*
- *On obtient l'égalité :* $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$.

Ex. :
Soit la suite géométrique de premier terme v_0 =1 et de raison q=2, alors pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 2^n$.
Si on représente dans un repère les premiers points $A_n(n;u_n)$ on obtient le graphique ci-contre.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	4	8	16

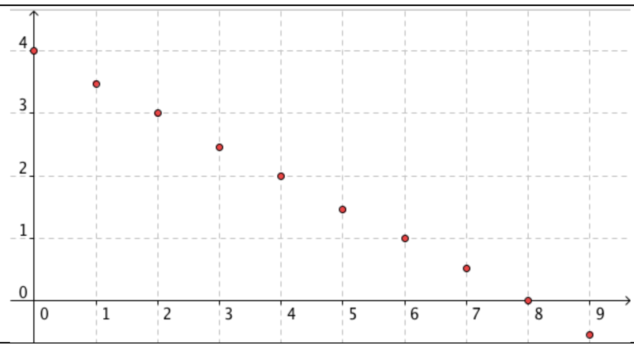


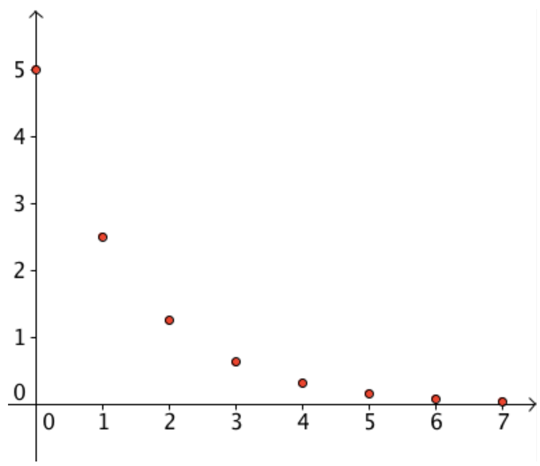
Méthode : Donner la nature d'une suite, sa raison et son sens de variation
Soit la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 2^n$.
Montrer que cette suite est géométrique en précisant sa raison et son premier terme.
En déduire son sens de variation.

Correction :
Pour montrer que c'est une suite géométrique, nous allons étudier le résultat de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
On sait que $u_n = 3 \times 2^n$, $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2$.
Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times2^n\times2}{3\times2^n}$. *On peut simplifier par* 3 *et* 2^n.
On a donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times2^n\times2}{3\times2^n} = \frac{2}{1} = 2$.
On obtient un nombre indépendant de n, c'est bien une suite géométrique de raison 2.
Le premier terme est ici $u_0 = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$.

La raison étant strictement supérieur à 1, la suite est strictement croissante.

SYNTHÉSE

suite arithmétique	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0	**Exemple :** $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

suite géométrique	(u_n) une **suite géométrique** - - de **raison** $q > 0$ - de premier terme $u_0 > 0$	**Exemple :** $q = 0{,}5$ et $u_0 = 5$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 0{,}5 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 0,5.
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 0{,}5 < 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

V. Exercice type EC

Alceste sort de son école de commerce. Il obtient des propositions d'emploi d'entreprise. avec les conditions suivantes :

- Entreprise Ariourien : Salaire mensuel de 1 600€ la première année, puis tous les ans une augmentation de 50€.
- Entreprise Géotout : Salaire mensuel de 1500€ la première année, puis une augmentation de 3,5% tous les ans.

On note respectivement u_n et v_n les salaires mensuels proposées par les entreprises Ariourien et Géotout la n-ième année. Ainsi, $u_1 = 1600$ et $v_1 = 1500$.
On arrondira au besoin au centième.

Partie A :
1. Entreprise Ariourien :
a. Calculer u_2 et u_3.
b. Donner la nature de la suite (u_n) et sa raison. En déduire u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Entreprise Géotout :
a. Calculer v_2 et v_3.
b. Donner la nature de la suite (v_n) et sa raison. En déduire v_{n+1} en fonction de v_n.

Partie B : le choix
Afin de faire un choix raisonner, Alceste décide de faire un tableur pour voir l'évolution de son salaire en fonction des conditions d'embauche.
Voici sa feuille de travail :

	A	B	C
1	n	entreprise Ariourien	entreprise Géotout
2	1	1 600,00 €	1 500,00 €
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		
12	11		
13	12		

1. Quelle formule doit-il mettre en B3 afin de calculer son salaire la 2ème année dans l'entreprise Ariourien (il devra pouvoir étendre cette formule en B4, B5,...
2. Quelle formule doit-il mettre en C3 afin de calculer son salaire la 2ème année dans l'entreprise Géotout (il devra pouvoir étendre cette formule en C4, C5,..
3. À l'aide de votre calculatrice, et en expliquant la démarche à partir de quelle année le salaire chez Géotout dépasse celui de Ariourien ?

Correction :
Partie A
1. a. Le salaire augmentant de 50€ par an, on aura : $u_2 = 1600 + 50 = 1650$ et $u_3 = 1650 + 50 = 1700$.
b. Pour passer d'un terme à un autre, il faut ajouter 50, il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 50.
On a donc : $u_{n+1} = u_n + 50$.
La raison étant positive, la suite (u_n) est strictement croissante.

2.a. La salaire augmente de 3,5% par an. Il faut donc multiplier le salaire de l'année d'avant par le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 3,5% soit : $1 + \frac{3,5}{100} = 1,035$.

On a donc : $v_2 = 1500 \times 1,035 = 1552,5$ et $v_3 = 1552,5 \times 1,035 \approx 1606,84$.

b. Pour passer d'un terme au terme suivant on multiplie toujours par 1,035. Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,035.

La raison étant strictement supérieur à 1, la suite est strictement croissante.

On a aussi : $v_{n+1} = 1,035 \times v_n$.

Partie B :

1. Il faut mettre : =B2+50
2. Il faut mettre : =C2*1,035

Remarque : ne pas oublier le = !!!

3. Pour cette question plusieurs méthodes :

- On peut tout d'abord calculer chaque terme de la suite afin de trouver le moment où v_n dépassera u_n :

On a : $u_2 = 1600 + 50 = 1650$; $u_3 = 1650 + 50 = 1700$; $u_4 = 1700 + 50 = 1750$; $u_5 = 1750 + 50 = 1800$; $u_6 = 1800 + 50 = 1850$; $u_7 = 1850 + 50 = 1900$; $u_8 = 1900 + 50 = 1950$; $u_9 = 1950 + 50 = 2000$; $u_{10} = 2000 + 50 = 2050$; $u_{11} = 2050 + 50 = 2100$.

De même: $v_2 = 1500 \times 1,035 = 1552,5$; $v_3 = 1552,5 \times 1,035 \approx 1606,84$; $v_4 = 1606,84 \times 1,035 \approx 1663,08$; $v_5 = 1663,08 \times 1,035 \approx 1721,28$; $v_6 = 1721,28 \times 1,035 \approx 1781,53$; $v_7 = 1781,53 \times 1,035 \approx 1843,88$; $v_8 = 1843,88 \times 1,035 \approx 1908,42$; $v_9 = 1908,42 \times 1,035 \approx 1975,21$; $v_{10} = 1975,21 \times 1,035 \approx 2044,35$; $v_{11} = 2044,35 \times 1,035 \approx 2115,90$.

Ainsi on voit que la 11$^{\text{ème}}$ année, le salaire chez Géotout sera supérieur au salaire d'Ariourien.

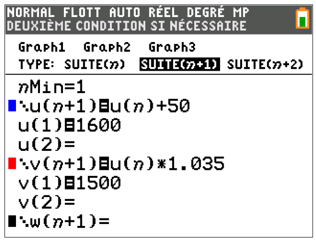
- On peut se servir de la calculatrice en mode suite (bien passer la calculatrice en mode suite !)

Pour les TI : En appuyant sur f(x) puis en sélectionnant suite(n+1) en haut :

on rentre :

*n*min=1 puis u(*n+1*)=u(*n*)+50 et u(1)=1600

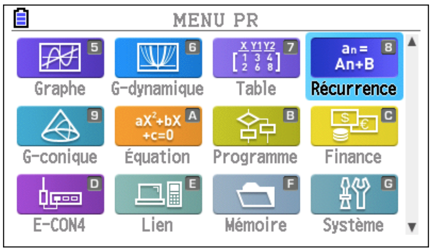
v(*n+1*)=v(*n*)*1,35 et v(1)=1500.

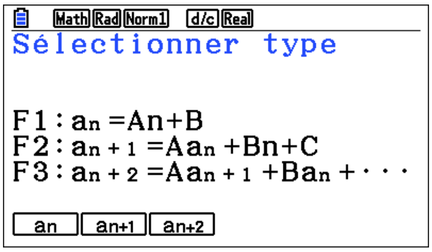


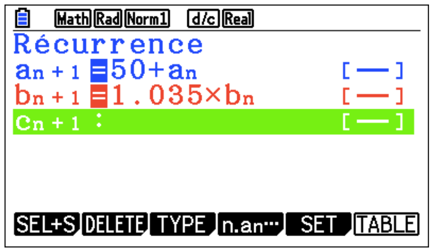
Remarque : Pour les TI, pour le u il faut taper : 2$^{\text{nde}}$ puis 7

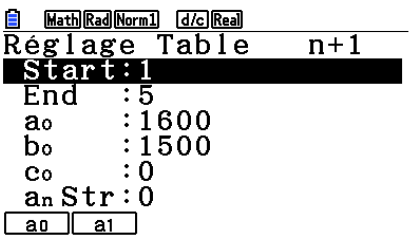
Pour les Casio :

Dans menu, sélectionnez récurrence. Puis dans Type (F3) choisir F2.Exit. Rentrer ensuite les suites dans a_{n+1} et b_{n+1}. Puis dans SET (F5), mettre Start à 1 car notre suite commence à u_1, End à 20 par exemple, puis a_0 à 1600 et b_0 à 1500, et enfin Table...







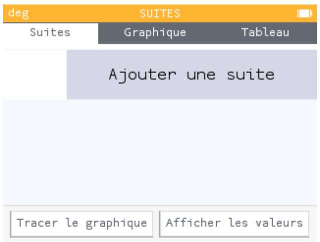


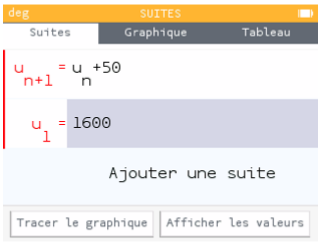
Pour les NUMWORKS :

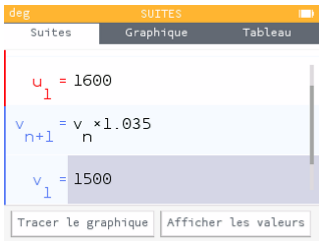
Menu suite puis ajouter une suite.

sélectionner u_{n+1}, puis mettre +50 après le u_n. Indiquer que u_1=1600 (pour modifier le u_0 en u_1, sélectionnez-le, puis ok, et mettez indice du premier terme 1, retour).

Faire de même avec v_n. Puis afficher les valeurs.

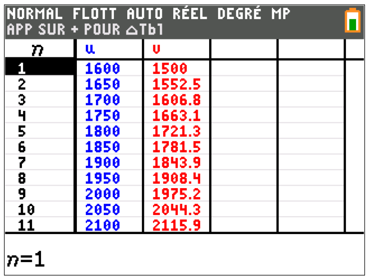






On ensuite visualiser le tableau de valeurs (en le faisant commencer à n=1 (dans déf table), avec un pas de 1) :

On observe le dépassement à partir de n=11.



n	u	v
1	1600	1500
2	1650	1552.5
3	1700	1606.8
4	1750	1663.1
5	1800	1721.3
6	1850	1781.5
7	1900	1843.9
8	1950	1908.4
9	2000	1975.2
10	2050	2044.3
11	2100	2115.9

n=1