Chapitre V : Tableaux et probabilités conditionnelles

Contenus
- Probabilité conditionnelle ;
- notation $P_A(B)$.

Capacités attendues
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.

Commentaires
- On explicite l'expérience aléatoire sous-jacente qui consiste à prélever au hasard un individu dans la population étudiée.
- Il s'agit, en classe de première, de transposer aux probabilités conditionnelles le travail sur les fréquences conditionnelles, en calculant la probabilité de B sachant A sous la forme : $P_A(B) = \frac{card(A \cap B)}{card(A)}$
- La représentation à l'aide d'un arbre de probabilités et la formule des probabilités totales relèvent du programme de la classe terminale.
- Des situations issues de différents domaines (économique, industriel, médical…) sont proposées. Ce travail permet notamment de donner du sens au vocabulaire des tests diagnostiques : faux positifs, faux négatifs, spécificité et sensibilité d'un test.

Table des matières

Rappel : **lien cours : lien**

Définitions :

- Soit une population de référence E et A une sous population de E. La proportion de A dans E est le nombre réel : $\frac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A et n_E l'effectif de E.

Exemple :
En 2018, il y a 2,2 milliards d'utilisateurs actifs dans le monde de Facebook dont 33 millions en France. Calculer la proportion des utilisateurs français de Facebook.

Correction :

$$p = \frac{33\ 000\ 000}{2\ 200\ 000\ 00} = 0{,}015 = \frac{1{,}5}{100} = 15\%.$$

- L'intersection $A \cap B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à la fois à A et à B.
- L'union $A \cup B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à A ou à B, c'est-à-dire ceux qui sont soit dans A, soit dans B, soit dans les 2.

I. Tableaux croisés et fréquences marginales/conditionnelles (rappel)

On parle de **tableau croisé** lorsque on étudie deux caractères d'une population.

Exemple théorique :
Soit A et B deux caractères d'une population.
On obtient le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	Total
A	Card(A∩B)	Card(A∩ $\overline{B}$)	Card(A)
$\overline{A}$	Card($\overline{A}$ ∩B)	Card($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$)	Card($\overline{A}$)
Total	Card(B)	Card($\overline{B}$)	1

Card(A) est le nombre de personnes possédant le caractère A.
Card(A∩B) est le nombre de personnes possédant le caractère A et le caractère B en même temps.

Exemple pratique :
Voici le tableau croisé étudiant la réussite au DNB selon le sexe :

	Admis	Recalés	Total
Garçons	317 779	365 684	365 684
Filles	346 187	47 905	373 449
Total	663 966	75 167	739 133

Fréquences marginales :
On obtient les fréquences marginales lorsque l'on divise chaque case du tableau par l'effectif total.

Exemple (par rapport à notre tableau DNB) :

Calculer la fréquence marginale des Admis Garçons.

Correction :
La fréquence marginale des Admis Garçon est : $\frac{317\,779}{739\,133} \approx 0{,}4299 = \frac{42{,}99}{100} = 42{,}99\%$.
Parmi les personnes ayant passé le DNB, 42,99% étaient des Garçons qui ont obtenu le DNB.

Fréquences conditionnelles :
On obtient la fréquence conditionnelle en divisant les cases par le total de la ligne ou de la colonne selon la condition étudiée.

Exemple (par rapport à notre tableau DNB) :

a. Calculer la fréquence d'admis parmi les filles.
b. Calculer la fréquence de garçons parmi les admis.

Correction :
a. Ici, la condition est « fille ». Donc on se place dans la ligne fille.
$$p = \frac{346\,187}{373\,449} \approx 0{,}9270 = 92{,}7\%$$
Parmi les filles, il y a 92,7% d'admises.

b. Ici, la condition est « admis ». Donc on se place dans la colonne admis.
$$p = \frac{317\,779}{663\,966} \approx 0{,}4786 = 47{,}86\%$$
Il y a 47,86% de garçons parmi les admis.

II. Probabilités conditionnelles **lien vidéo : lien**

Définition :
Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.
La probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, est :
$$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$$
Remarque :
On divise par le cardinal de la condition.

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un tableau

On a la répartition suivante dans une classe d'un lycée :

	Interne (I)	Externe (E)	Demi-pensionnaire (D)	Total
Fille (F)	2	3	11	16
Garçon (G)	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

On choisit au hasard un élève dans la classe.
Quelle est la probabilité qu'il soit externe sachant que c'est une fille ?

Correction :
Dans la question, il y a « sachant que c'est une fille ». La condition est donc que c'est une fille.
On cherche donc $P_F(E)$.

$$P_F(E) = \frac{Card(E \cap F)}{Card(F)} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 = 18{,}75\%$$

Il y a 18,75% de chances de choisir un externe sachant que l'élève est une fille.

Rappel : Card(F) est le nombre de filles dans la classe.