Variables aléatoires

Activité 1 :

Une urne contient trois boules vertes et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire n boules successivement <u>avec remise</u>. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes obtenues.

1. Dans cette question n=1.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ?

2. Dans cette question n=2.
a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte puis une boule blanche ?
Est-ce la même probabilité que d'obtenir une boule blanche puis une boule verte ?
b. Décrire cette situation par un arbre de probabilité.
c. Que représente l'événement « $\{X = 0\}$ » ? Quelle est sa probabilité ?
d. Calculer $P(X=1)$ puis $P(X=2)$.
e. Remplissez le tableau suivant à l'aide des résultats précédents:

k	0	1	2
$P(X=k)$			

Il s'agit d'un tableau de loi de probabilité.

3. Dans cette situation n=10.
En utilisant un tableur on a obtenu :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0,05631	0,18771	0,28157	0,25028	0,14600	0,05840	0,01622	0,00309	0,00039	0,00003	$5{,}9 \times 10^{-6}$

a. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules vertes ? Au moins six boules vertes ? Au moins une boule verte ?
b. Exprimer chacun des trois événement précédent à l'aide de la variable aléatoire X.
c. Quelle est la probabilité d'obtenir entre trois et six boule verte ?
On notera $P(3 \leq X \leq 6)$ cette probabilité.

Cours : lien vidéo : [lien]()

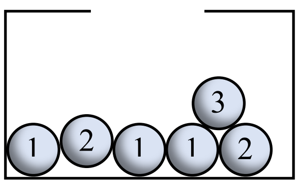
I. Variables aléatoire discrète

Définition :

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire (l'ensemble des issues possibles) ; on a défini une loi de probabilité sur cet univers.
On définit une variable aléatoire X sur Ω lorsque l'on associe un nombre réel à chaque issue.

Exemple :

On choisit une boule numérotée dans l'urne ci-contre et on lui associe le nombre inscrit sur la boule. On définit ainsi une variable aléatoire X qui prend les valeurs : 1, 2 et 3.



On notera $\{X = x_i\}$ (par exemple $\{X = 1\}$) l'événement « la valeur x_i, est obtenue »(par exemple « la valeur 1, est obtenue » et $\{X < x_i\}$ l'événement « toutes les valeurs strictement inférieur à x_i, sont obtenue ».

II. Loi de probabilité

Définition :

Si $x_1, \dots, x_n$ désignent les valeurs prises par X, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles X prend la valeurs x_i. On note $P(X = x_i)$ la probabilité de cet événement.

La loi de probabilité est donnée par les x_i et les $P(X = x_i)$ (i allant de 1 à n).

On représente généralement la loi de probabilité par un tableau :

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	x_1	…	x_i	…	x_n
Probabilité associée $P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$ ou p_1	…	$P(X = x_i)$ ou p_i	…	$P(X = x_n)$ ou p_n

Remarques :

- La somme des probabilité doit toujours être égale à 1.
- Pour vérifier que vous avez une loi de probabilité, vous devez vérifier que vous avez bien toutes les issues listées dans votre tableau, qu'aucune probabilité n'est négative et que la somme des probabilités fait bien 1.

Exemple :

Dans le cas précédent, on obtient le tableau suivant :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de tirer une boule notée 1 (P(X=1)) est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Dans le tableau on peut avoir accès rapidement à $P(X < 3)$ (probabilité de tiré une boule avec un numéro strictement inférieur à 3, donc un 1 ou un 2 :

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(x = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Faire les exercices 1 et 2.

Activité 2 :

Si on considère un jeu pour lequel on lance deux dés cubique non truqué. Si l'on obtient un double 6, on gagne 50 €, sinon on perd un euro. On note X la variable aléatoire donnant le gain en euros d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par la valeur X ?
2. Donner la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.
3. On souhaiterait déterminer si il est rentable de jouer à ce jeu, c'est-à-dire si, en jouant à ce jeu, on peut espérer gagner des euros et si oui, combien. Pour cela, on va calculer une moyenne en multipliant chacune des valeurs prises par X par la probabilité d'obtenir cette valeur. Calculer cette valeur.
4. Que peut-on en conclure ? Cette moyenne est appelée espérance de la variable aléatoire X. On la note E(X).

III. Espérance

Définition :
L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre E(X) :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots x_i \times p_i + \cdots + x_n \times p_n$$

Remarque :
L'espérance est la moyenne pondérée des valeurs prises X.

Exemple :
Avec notre situation : $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

Faire les exercices 3 et 4.