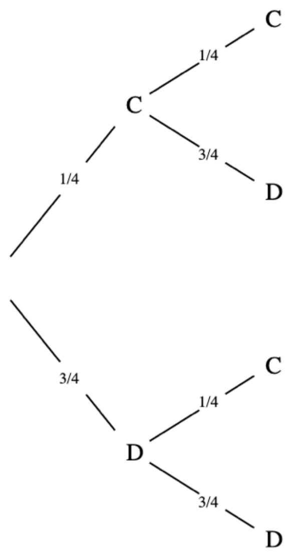
Variables aléatoires et épreuves de Bernoulli

Exercice 1 :



1. X peut prendre les valeurs 0 (on obtient aucun C), 1 (on obtient un seul C) et 2 (on obtient 2 C).

2. Pour $P(X=2)$ il y a un seul chemin (le premier).
$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}=0{,}0625.$

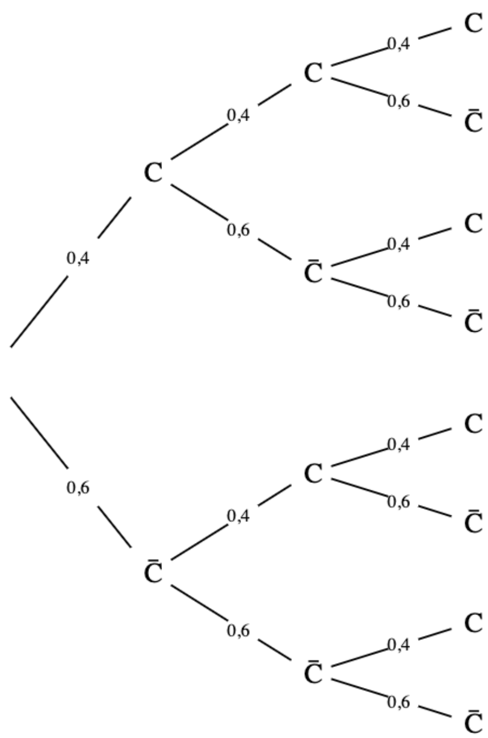
3. Pour $P(X=1)$ il y a deux chemins (le 2ème et le 3ème).
La probabilité d'un seul chemin est : $p=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}=0{,}1875.$
Comme il y a deux chemins :
$P(X=1)=2\times 0{,}1875=0{,}375.$

4.

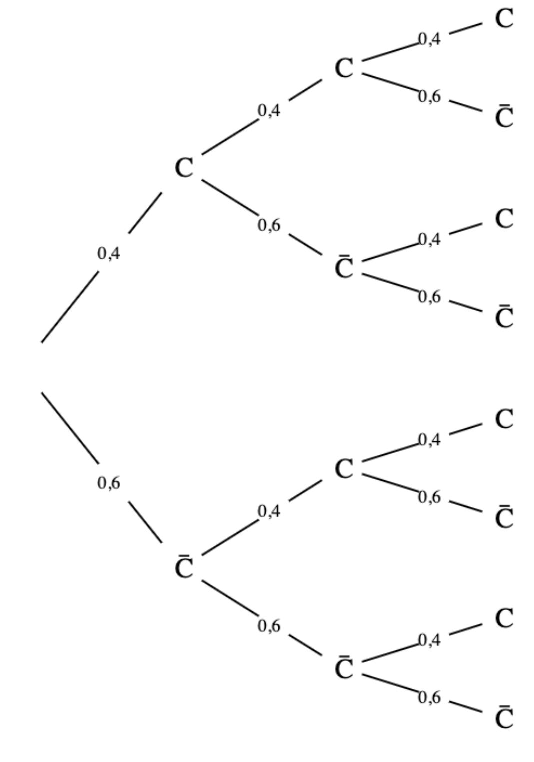
x_i	*0*	*1*	*2*
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}=0{,}5625$	$0{,}375$	$0{,}0625$

Exercice 2 :

1.



2. Je complète un peu l'arbre :

Arbre	Issues	Probabilités	Nombre de contrats conclus
	(CCC)	$0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}4^3 = 0{,}064$	3
	$(CC\bar{C})$	$0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}4^2 \times 0{,}6$ $= 0{,}096$	2
	$(C\bar{C}C)$	$0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}4^2 \times 0{,}6$ $= 0{,}096$	2
	$(C\bar{C}\bar{C})$	$0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}6^2$ $= 0{,}144$	1
	$(\bar{C}CC)$	$0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}4^2 \times 0{,}6$ $= 0{,}096$	2
	$(\bar{C}C\bar{C})$	$0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}6^2$ $= 0{,}144$	1
	$\bar{C}\bar{C}C$	$0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}4 \times 0{,}6^2$ $= 0{,}144$	1
	$\bar{C}\bar{C}\bar{C}$	$0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}6^3 = 0{,}216$	0

Il y a 3 chemins qui permettent d'obtenir 2 contrats.
La probabilité d'un seul chemin est de 0,096.
Donc la probabilité d'obtenir 2 contrats est de : $0{,}096 \times 3 = 0{,}288$.

3. Il y a un seul chemin qui mène à 0 contrat.
La probabilité qu'il n'y ait aucun contrat de conclu est de : 0,216.

4. La probabilité qu'au plus deux personnes concluent un contrat est la somme de la probabilité qu'aucun contrat ne soit conclu avec la probabilité qu'un seul contrat soit signé et la probabilité que deux contrats soient signés :

$$p = P(C = 0) + P(C = 1) + P(C = 2)$$

On a déjà calculé $P(C = 0)$ et $P(C = 2)$: $P(C = 0) = 0{,}216$ et $P(C = 2) = 0{,}288$.

Pour $P(C = 1)$:
Il y a 3 chemins qui mène à 1 contrat signé. Chacun des chemins à une probabilité de 0,144.
Donc : $P(C = 1) = 0{,}144 \times 3 = 0{,}432$.

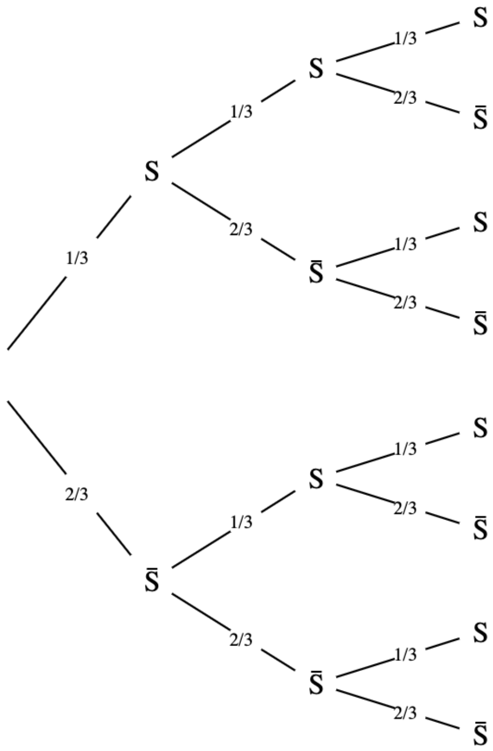
D'où :
$p = P(C = 0) + P(C = 1) + P(C = 2) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936$.

Exercice 3 :

1. L'expérience aléatoire a bien 2 issues : S : « obtenir une boule noire » et $\bar{S}$: « ne pas obtenir une boule noire ».

2. La probabilité de succès à chaque épreuve est de : $P(S) = \frac{5}{7+5+3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Cela donne l'arbre de probabilités suivant :



Pour $P(X = 1)$, il y a 3 chemins qui mène à 1 succès.
La probabilité d'un seul chemin est : $p = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$.
Donc, $P(X = 1) = 3 \times \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$.

3. $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.
Calcul de $P(X = 2)$:
il y a 3 chemins qui mène à 2 succès.
La probabilité d'un seul chemin est : $p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$.
Donc, $P(X = 1) = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{3}{27}$.

Calcul de $P(X = 3)$:
Il n'y a qu'un chemin qui mène à 3 succès. Donc, $P(X = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

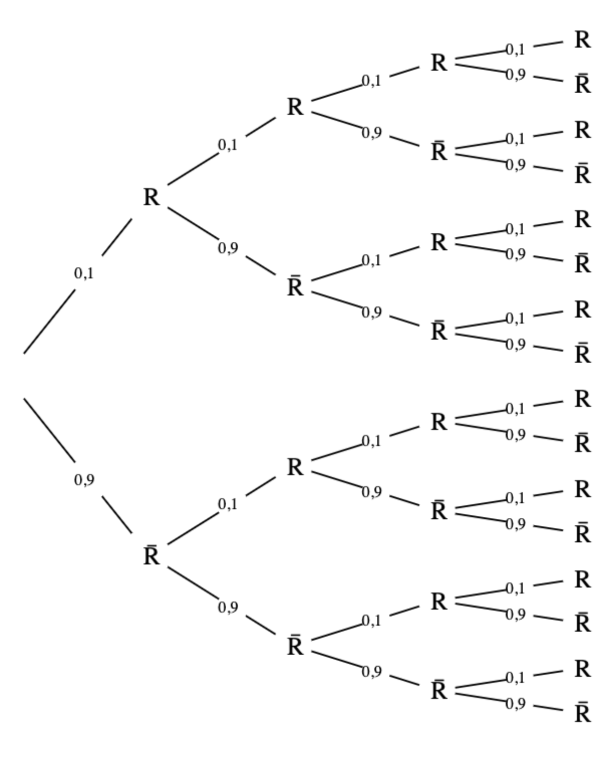
On a donc : $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27}$.

4. $E(X) = P(S) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 :

Pour se réveiller le matin, un élève utilise son portable. Malheureusement, dans 10 % des cas, sa batterie lui fait défaut et son réveil ne fonctionne pas, ce qu'il empêche d'être à l'heure au lycée.
Sur les quatre jours de la semaine où il doit arriver à l'heure, on note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de jours où son réveil n'a pas été efficace.

1. Dresser l'arbre de probabilités décrivant la situation.
Notons R l'événement : « le réveil ne sonne pas et il arrive en retard ».
Et oui, l'arbre commence à être grand ! ;)
Pour les questions suivantes, je l'ai complété un peu...

Arbre des probabilités	Issues	probabilités	Nombre de R
	$(RRRR)$	$0{,}1^4 = 0{,}0001$	4
	$(RRR\bar{R})$	$0{,}1^3 \times 0{,}9 = 0{,}0009$	3
	$(RR\bar{R}R)$	$0{,}1^3 \times 0{,}9 = 0{,}0009$	3
	$(RR\bar{R}\bar{R})$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(R\bar{R}RR)$	$0{,}1^3 \times 0{,}9 = 0{,}0009$	3
	$(R\bar{R}R\bar{R})$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(R\bar{R}\bar{R}R)$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(R\bar{R}\bar{R}\bar{R})$	$0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}0729$	1
	$(\bar{R}RRR)$	$0{,}1^3 \times 0{,}9 = 0{,}0009$	3
	$(\bar{R}RR\bar{R})$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(\bar{R}R\bar{R}R)$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(\bar{R}R\bar{R}\bar{R})$	$0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}0729$	1
	$(\bar{R}\bar{R}RR)$	$0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$	2
	$(\bar{R}\bar{R}R\bar{R})$	$0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}0729$	1
	$(\bar{R}\bar{R}\bar{R}R)$	$0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}0729$	1
	$(\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R})$	$0{,}9^4 = 0{,}6561$	0

2. Calculer $P(X = 2)$.
Il y a 6 chemins qui mènent à 2 retards.
La probabilité d'un seul chemin est de 0,0081.
Donc, $P(X = 2) = 6 \times 0{,}0081 = 0{,}0486$.

3. Calculer $P(X < 2)$ puis $P(X < 4)$.
$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Calcul de $P(X = 0)$:
Un seul chemin mène à 0 R.
Donc, $P(X = 0) = 0{,}6561$

Calcul de $P(X = 1)$:

Il y a 4 chemins qui mènent à 1 retards.
La probabilité d'un seul chemin est de 0,0081.
Donc, $P(X = 1) = 4 \times 0{,}0729 = 0{,}2916$.

Donc : $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}6561 + 0{,}2916 = 0{,}9477$.

$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.
Il nous reste à calculer $P(X = 3)$ car les autres ont été calculés plus haut.

Calcul de $P(X = 3)$:
Il y a 4 chemins qui mènent à 3 retards.
La probabilité d'un seul chemin est de 0,0009.
Donc, $P(X = 1) = 4 \times 0{,}0009 = 0{,}0036$.

Donc : $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}6561 + 0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036 = 0{,}9999$.

Remarque :
Pour $P(X < 4)$, on aurait pu dire :
$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$.

4. En déduire $P(2 \leq X \leq 3)$.
$P(2 \leq X \leq 3) = P(X < 4) - P(X < 2) = 0{,}9999 - 0{,}9477 = 0{,}0522$.

Ou encore :

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2) = \cdots$$