Variables aléatoires et épreuves de Bernoulli

Table des matières

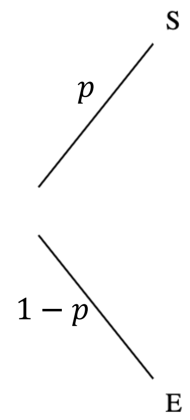
Rappel :

Définition :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant 2 issues :

- Le succès, noté S de probabilité p ;
- L'échec, noté E, de probabilité $q = 1 - p$;
- p est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

L'arbre correspondant à une épreuve de Bernoulli est donné ci-contre :



I. Épreuve de Bernoulli

Définition :

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues.
On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 0 pour l'une des issues et 1 pour l'autre.

On pose : $p = P(X = 0)$ et $1 - p = P(X = 1)$.

Exemple :

Un basketteur professionnel marque un lancer franc dans 90% des cas.

On peut associer à cette situation une épreuve de Bernoulli. Les issues sont :

- « réussir son lancer franc » de probabilité : $p = 0{,}9$;
- « rater son lancer franc » de probabilité : $1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Exercice type résolu :

Dans une urne sont disposés des billes indiscernables au toucher. On compte 10 billes vertes et cinq billes blanches. Un joueur tire au hasard l'une des billes. Il gagne si il tire une bille blanche.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une épreuve de Bernoulli.
2. Quelle est la probabilité de l'événement « le joueur gagne » ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement « le joueur perd » ?
4. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

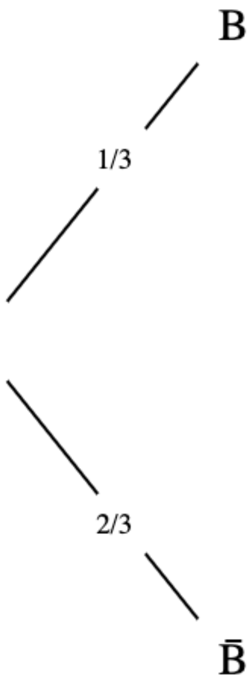
Correction :

1. Cette épreuve aléatoire a deux issues : « tirer une boule blanche » noter B et « tirer une boule verte », qui est l'événement contraire de $\bar{B}$. Cette situation est modélisée par une épreuve de Bernoulli.

2. $P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

3. $P(\bar{B}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. *On retrouve bien :* $P(B) + P(\bar{B}) = 1$.

4. La situation peut être représentée par l'arbre ci-contre.



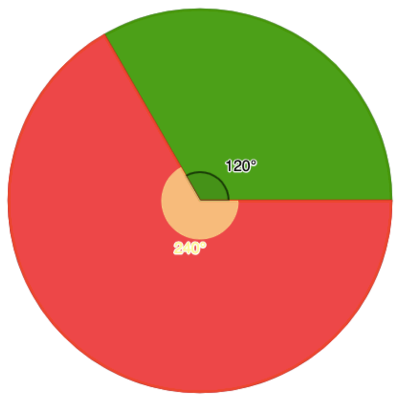
II. Loi de Bernoulli

Définition :
La loi de probabilité associée une épreuve de Bernoulli est nommée **loi de Bernoulli de paramètre p**.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	*1-p*	*p*

Propriété :
Son espérance est $E(X) = p$.

Exercice type résolu :
Lors d'une loterie, on fait tourner une grande roue découpées en deux secteurs : un secteur vert, de 120°, et un secteur rouge, de 240°.
On associe 1 à l'événement « La roue arrête de tourner sur le secteur vert » et 0 à l'événement « La roue arrête de tourner sur le secteur rouge ».
a. Justifier que cette épreuve est une épreuve de Bernoulli.
b. En déterminer le paramètre et la loi de probabilité associée.
c. Donner l'espérance de cette loi.



Correction :

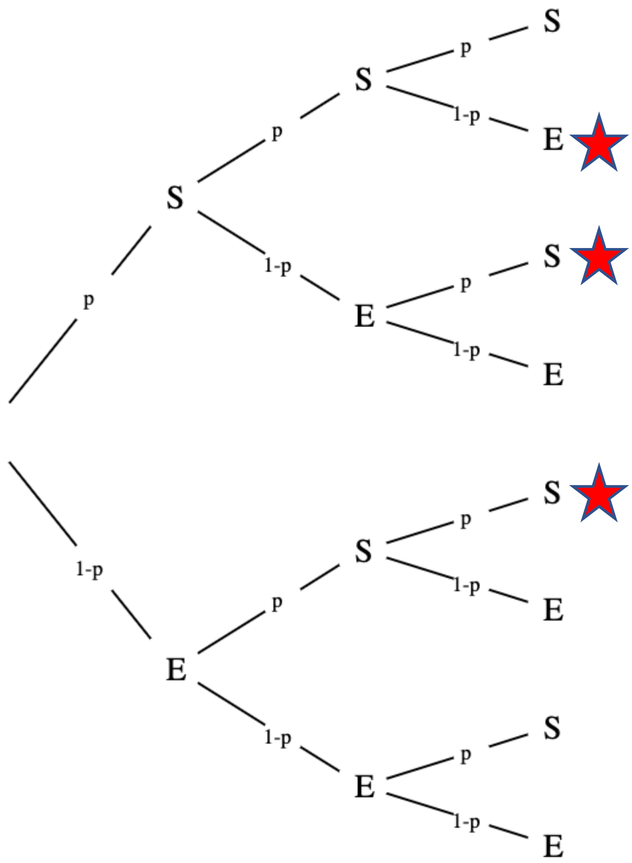
a. L'expérience aléatoire à deux issues : « La roue arrête de tourner sur le secteur vert » et « La roue arrête de tourner sur le secteur rouge ». C'est donc une épreuve de Bernoulli.

b. Son paramètre est la probabilité associée à 1, c'est-à-dire, que la roue s'arrête sur le secteur vert, soit $p = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. (360 car un tour complet fait 360° !).

x_i	*0*	*1*
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

c. Son espérance est : $E(X) = \frac{1}{3}$.

III. Répétition d'épreuves de Bernoulli

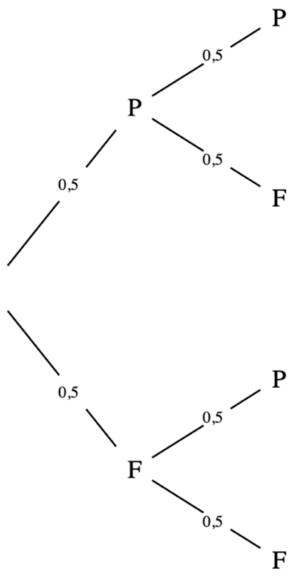


Lorsque l'on répète de façon identique et indépendante des épreuve de Bernoulli, on peut modéliser la situation par un arbre de probabilités.
On donne ci-contre trois répétitions de l'épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Pour calculer la probabilité d'obtenir, par exemple, 2 fois S et donc 1 fois E, on repère les chemins dans l'arbre.
Ici, il y en a trois correspondant aux événements (SSE), (SES) et (ESS).

On calcule ensuite la probabilité associée par exemple à l'événement (SSE), en appliquant le principe multiplicatif : $P(SSE) = p \times p \times (1 - p)$, puis on multiplie cette probabilité par trois puisque trois chemins conduisent à l'événement : « 2 fois S et donc 1 fois E ».

Exemple :
On lance 2 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibré.
On peut représenter cette situation par un arbre. On note P l'événement « la pièce tombe sur pile » et F l'événement « la pièce tombe sur face. »

On a ainsi 50 % des premiers lancer qui amène à un « pile » puis, sur ses 50 %, de nouveau 50 % des deuxièmes lancer qui amène un « pile » soit au total 25 % des résultats finaux qui donne deux « pile » sur les deux lancers.

Arbre de probabilités	Issues	Probabilités
	(PP)	$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
	(PF)	$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
	(FP)	$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
	(FF)	$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

Si on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de face « pile » obtenu à l'issue des deux lancers, la loi de probabilité associé est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

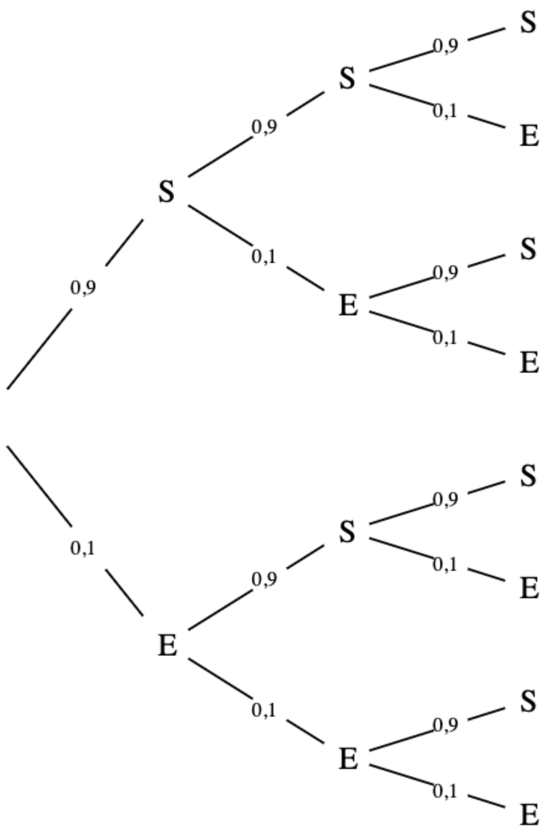
Exercice type résolu :

Lors d'un entrainement au lancer franc, un basketteur réalise 3 lancers.

Il réussit 9 fois sur 10 son lancer.

Calculer la probabilité qu'il réussisse 2 lancers francs sur 3.

Correction :
On réalise l'arbre de probabilité correspondant. On répète 3 fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.
On note est l'événement S « le lancer franc est réussi ».
Sur l'arbre construit, on repère ensuite les chemins qui correspondent à deux lancers francs réussi. La probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur un arbre est donné par le produit des probabilités rencontrer le long du chemin.

Arbre de probabilités	Issues	Probabilités	Nombre de succès
	(SSS)	$0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}9^3 = 0{,}729$	3
	(SSE)	$0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}081$	2
	(SES)	$0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}081$	2
	(SEE)	$0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}009$	1
	(ESS)	$0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}081$	2
	(ESE)	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}009$	1
	(EES)	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}009$	1
	(EEE)	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}1^3 = 0{,}001$	0

La probabilité d'un des chemins permettant 2 succès est :
$p = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}081$.
L'évènement « obtenir 2 succès correspond à 3 chemins ».
$P(2\ succès) = 0{,}081 \times 3 = 0{,}243$.

Ou
La probabilité d'obtenir 2 succès est la somme de tous les chemins (ici 3) qui permettent d'obtenir 2 succès :
$P(2\ succès) = 0{,}081 + 0{,}081 + 0{,}81 = 0{,}243$.

Ainsi, notre basketteur à 24,3% de chances de réussir 2 lancers francs sur les 3.

Remarque : Tous les chemins menant à 2 succès offrent la même probabilité (0,243) et de même pour 1 succès (0,009).