Chapitre VI

Variations d'une fonction (2s)

Table des matières

I. Courbe représentative d'une fonction

Définition :

On définit une fonction sur une partie D de $\mathbb{R}$ (voire sur $\mathbb{R}$) en associant à chaque nombre réel x de D un unique nombre y. On dit que :

- f est une fonction définie sur D.
- D est l'ensemble de définition de la fonction f.

Ex. :

- L'ensemble de définition de la fonction carré et de la fonction cube est $\mathbb{R}$, celui de la fonction racine carrée est $[0\ ;\ +\infty[$.
- La fonction g :$t \mapsto \sqrt{t-4}$ peut être définie pour tout réel t tel que $t - 4 \geq 0$ soit $t \geq 4$, donc D_f= $[4\ ;\ +\infty[$.

Définition :

Dans le plan muni d'un repère, la courbe *Cf* représentative d'une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $y=f(x)$ quand x décrit D.

On dit que *Cf* a pour équation $y=f(x)$.

Méthode :

Pour tracer la courbe représentative, le plus simple est de faire un tableau de valeurs puis de placer les points dans un repère adapté afin de les relier.

Traçons la courbe représentation de la fonction f :$x \mapsto x^2 - 2x - 2$.

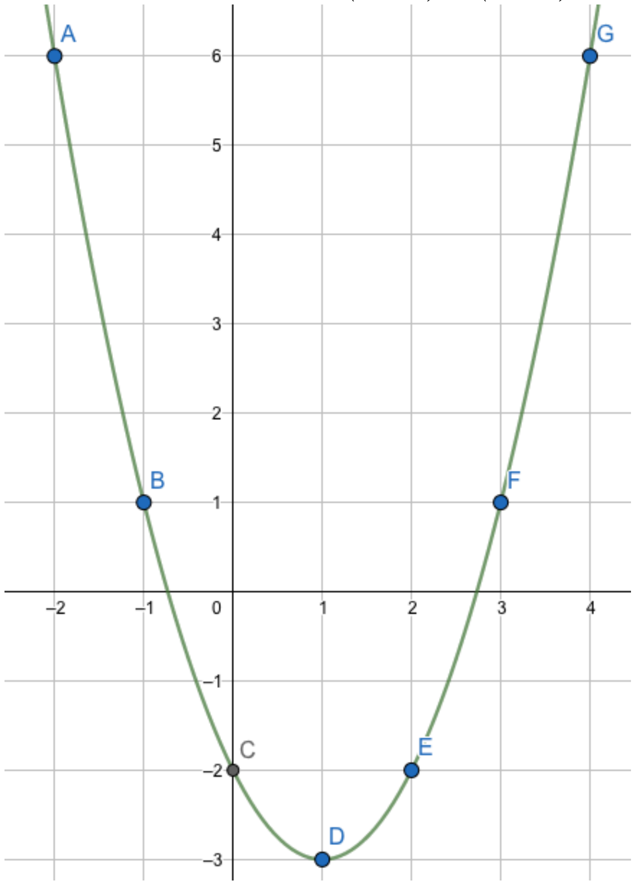
Correction :

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

La courbe représentative va donc passer par les points A (-2 ; 6), B(-1 ; 1), …

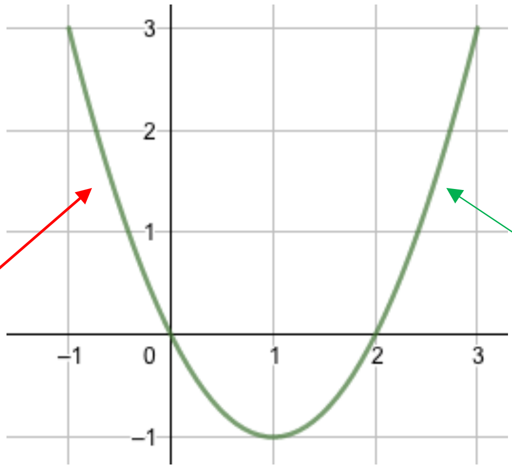


II. Sens de variation et extremum d'une fonction

1. Variation d'une fonction

Dans le plan muni d'un repère, on considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 3].

On dit que la fonction f est <u>strictement décroissante</u> sur [-1 ; 1].



On dit que la fonction f est <u>strictement croissante</u> sur [1 ; 3].

Les variations de la fonction f peuvent être résumées dans un <u>tableau de variations</u> :

x	-1		1		3
variations de f	3	↘	1	↗	3

Définitions :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I :

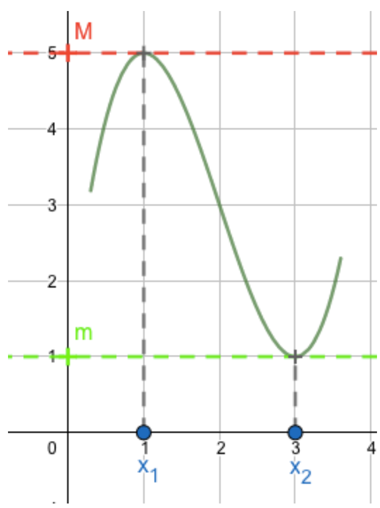
- Dire que f est strictement croissante sur I signifie que pour tous nombres réels a et b de I tels que $a<b$, on a l'inégalité $f(a) < f(b)$.
- Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous nombres réels a et b de I tels que $a<b$, on a l'inégalité $f(a) > f(b)$.

2. Extremum d'une fonction

Définitions :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

- Dire que M est le maximum de la fonction f sur I en x_1 signifie que, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leq M$ avec $M=f(x_1)$.
- Dire que m est le minimum de la fonction f sur I en x_2 signifie que, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leq m$ avec $m=f(x_2)$.



III. Sens de variation d'une fonction affine

Propriété :
f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \times x + b$ si et seulement si pour tous nombres réel x_1 et x_2 distincts, le nombre réel $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est constant et égal à a. Ce nombre est le coefficient directeur de la fonction affine.

Propriétés :
f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \times x + b$.
Les variations de f dépendent du signe de a.

- Si a>0, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si a<0, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

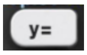
x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Si a=0, alors f est constante.

Ex. :

- La fonction affine g :$x \longmapsto 2x + 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car a=2>0.
- La fonction affine h :$x \longmapsto -3{,}2x + 5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car a=-3,2<0.

IV. Variations des fonctions de référence

Durant l'année de seconde nous étudierons 4 fonctions de référence : la fonction carré ($x \mapsto x^2$), la fonction cube ($x \mapsto x^3$), la fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$) et la fonction racine carrée ($x \mapsto \sqrt{x}$).
Pour chacune des fonctions, nous allons les visualiser sur la calculatrice puis faire leur tableau de variations.
Pour cela, appuyez sur la touche  afin d'accéder au menu graphique de la calculatrice.

Rentrez la fonction, pour les x, utilisez la touche  puis enfin, pour visualiser la courbe, appuyez sur  .

1. La fonction carré

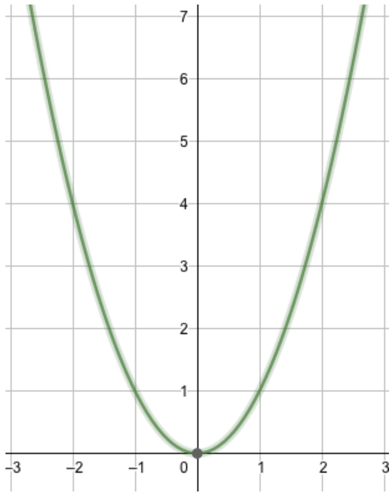
La fonction carré est :

- strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$;
- strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de *la fonction carré*	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction carré est 0, atteint pour x=0.



Démonstration :

Pour comparer 2 nombres, il peut parfois être intéressant d'étudier le signe de leur différence :

Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels :

- $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$;
- $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

Exercice :

Vous allez étudier les variations de la fonction carré.

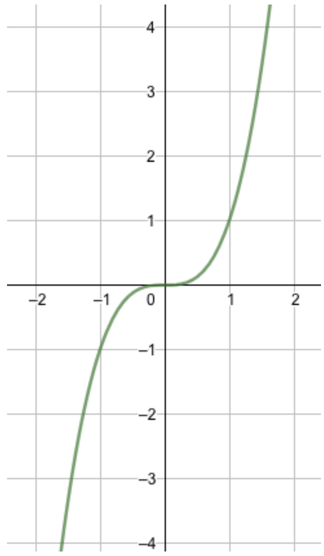
Soit a et b deux nombres réels tels que a<b, et f :$x \mapsto x^2$.

1. Factoriser b^2-a^2.

2. En déduire le signe b^2-a^2 *sur [0 ; +∞[, puis sur [0 ; +∞[.*

3. En déduire la comparaison de a^2 *et* b^2.

4. Conclure sur les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Propriétés :

- La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction carré admet un axe de symétrie : la droite *x=0.*

2. La fonction cube

La fonction cube est strictement croissante sur]−∞ ; +∞[.

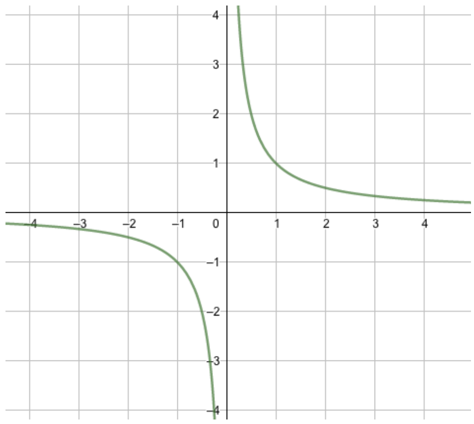
Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de *la fonction cube*	$-\infty \nearrow +\infty$

Propriétés :

- La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction carré admet un centre de symétrie : O (l'origine).

3. La fonction inverse



La fonction inverse est strictement décroissante sur les intervalles]−∞ ; 0] et[0 ; +∞[.

Propriétés :

- La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}^*$ $(\,]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[\,)$.
- La fonction inverse admet un centre de symétrie : O (l'origine).

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de *la fonction carré*	$\searrow$	‖	$\searrow$

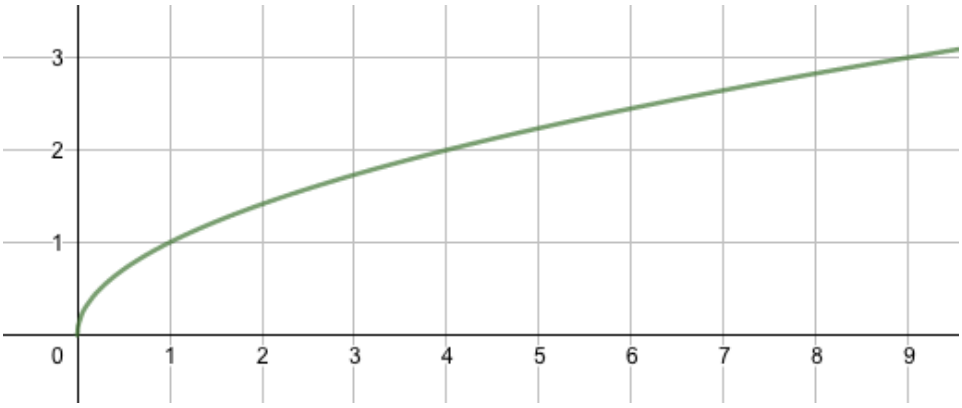
4. La fonction racine carrée

La fonction cube est strictement croissante sur [0 ; +∞[.
Son tableau de variations est :

x	0	$+\infty$
Variations de *la fonction cube*	0 ↗	$+\infty$

Propriété :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ $[0;+\infty[$).



Pour aller un peu plus loin (hors programme):

Une conique est une courbe plane que l'on peut tracer sur un cône de révolution à deux nappes. Suivant la position qu'il occupe par rapport à un cône, un plan qui coupe ce dernier déterminera une intersection qui sera :

- un cercle : le plan est perpendiculaire à l'axe ;
- une ellipse : le plan est incliné sur l'axe, mais il ne coupe qu'une seule des deux nappes ;
- une hyperbole : le plan est incliné ou parallèle à l'axe et coupe les deux nappes ;
- une parabole : le plan est parallèle à un plan tangent au cône.