Chapitre VII

Manipuler les vecteurs du plan (non repérés) (2s)

Table des matières

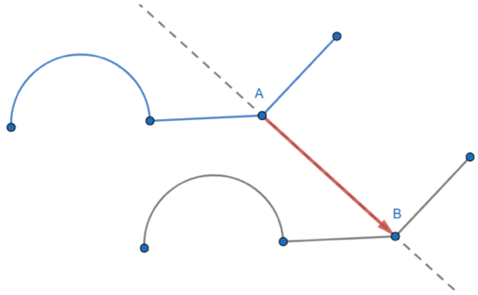
I. Notions de vecteurs

a. Définitions

À la translation qui transforme A en B, avec B différent de A, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a trois caractéristiques :

- une <u>direction</u>, celle de la droite (AB) ;
- un <u>sens</u>, de A vers B ;
- une <u>norme</u>, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ qui est la longueur AB.



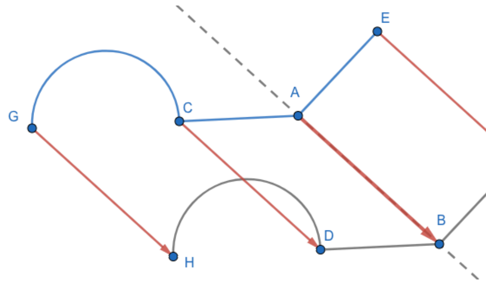
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple :

La translation qui amène A sur B sur la figure ci-contre, amène C sur D, E sur F et G sur H.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont dits égaux.



b. Égalité de vecteurs

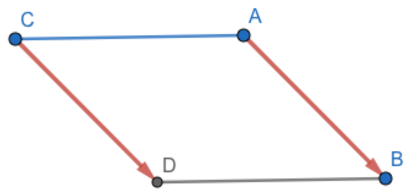
Définition :

Des vecteurs égaux sont des vecteurs de même direction, même sens et même norme.

On peut noter $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs égaux à un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Définition :

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

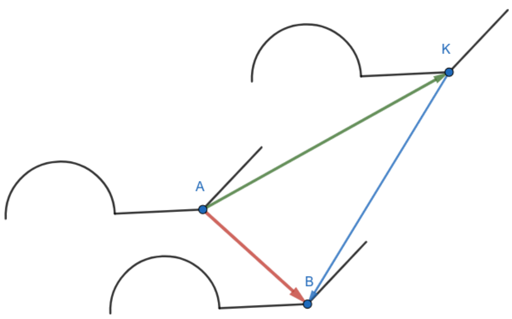
On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots = \vec{0}$.

c. Somme de vecteurs

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

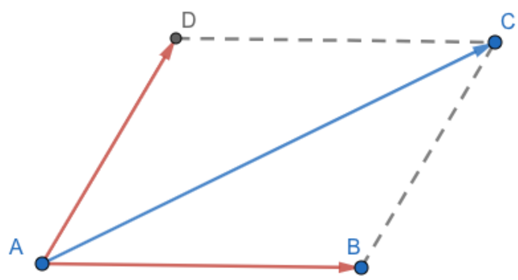


Relation de Chasles :

Pour tous points A, B, K, on a : $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété :

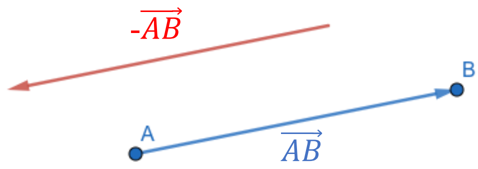
ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



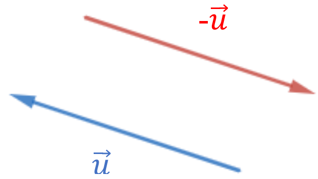
II. Opérations sur les vecteurs

Définitions :

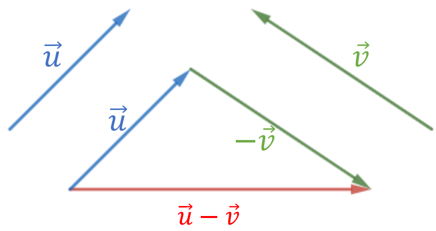
- Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté -$\overrightarrow{AB}$, est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a -$\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BA}$.



- Le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$, noté -$\vec{u}$, est le vecteur de même direction et de même norme que le vecteur $\vec{u}$, mais de sens contraire au vecteur $\vec{u}$.

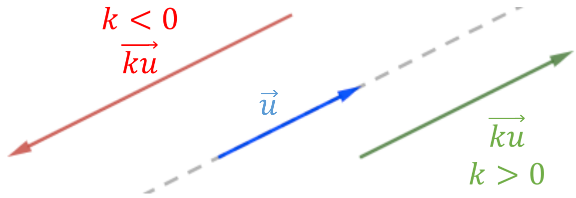


Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques. La différence du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
Pour représenter le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$, on trace le vecteur $\vec{u}$ puis à son extrémité, le vecteur $-\vec{v}$.

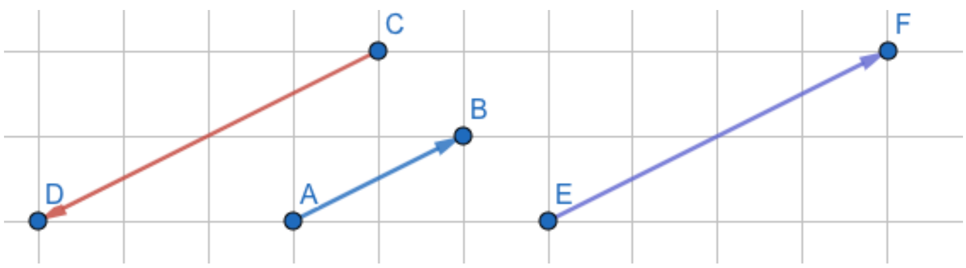


Définitions :
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur noté $k\vec{u}$ qui a :

- La même direction que le vecteur $\vec{u}$;
- Le même sens que le vecteur $\vec{u}$ *si* $k > 0$, ou bien le sens contraire si $k<0$;
- Une norme (longueur) égale à k fois celle du vecteur $\vec{u}$ *si* $k > 0$, ou -k fois celle du vecteur $\vec{u}$ si $k<0$.



Ex. :



Sur la figure ci-contre :
$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$

Règles de calcul (admises)
Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$

Exemples :

- $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$
- $4\vec{u} + 3\vec{u} = (4 + 3)\vec{u} = 7\vec{u}$
- $4(8\vec{u}) = (4 \times 8)\vec{u} = 32\vec{u}$

Propriété :
Le point M est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

III. Colinéarité de vecteurs

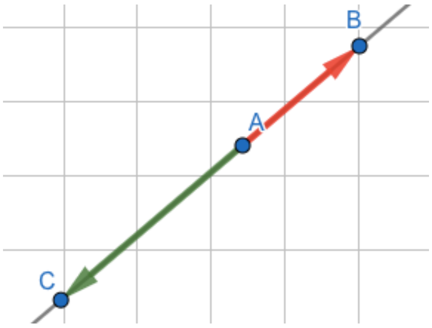
Définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

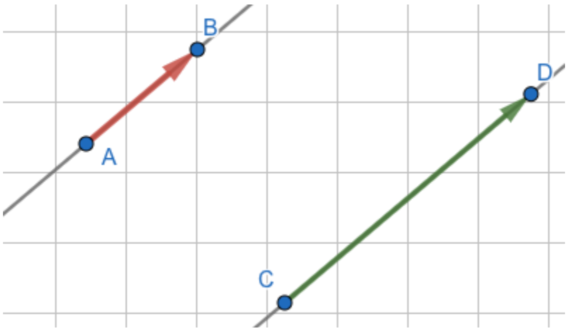
Dans ce cas, il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ et donc $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$.

Propriétés :

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Définitions :

- Deux vecteurs non colinéaires forment une base des vecteurs du plan.
- Lorsque les directions de ces deux vecteurs sont orthogonales, on dit que la base la base est orthogonale.
- Si, de plus, ces deux vecteurs ont la même norme, alors on dit que la base est orthonormée.