BTS SIO – 1

Chapitre I

NUMÉRATION ET CONVERSION

Contenus

- Numération en bases 10, 2 et 16 des entiers et des réels. Conversions entre ces bases.
- Addition, soustraction, multiplication et division des entiers naturels.
- Notions d'arrondi et de précision.

Capacités

- Passer de l'écriture d'un nombre dans une base à une autre.
- Calculer à la main :
  - Des additions en bases 2 et 16 ;
  - Des multiplications et des divisions par une puissance de deux, en base 2 ;
  - Arrondir un entier ou un réel (par défaut, par excès, au plus près...).

Table des matières

Introduction – Que signifie 1979 ?

La numération (système permettant d'écrire et de nommer les divers nombres) bien que familière pour nous, est apparue il y a très longtemps (il y a quelques 35 000 ans) et à énormément évoluée. D'un simple système de comptage, il a fallu ensuite faire des opérations de plus en plus complexes afin de suivre la complexité du monde en construction.
Nous utilisons principalement la base 10.
On pourra noter $1979 = (1979)_{10}$.
Notre système de numération repose sur 2 principes :

- L'utilisation de 10 symboles : $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$;
- Le principe de position : un même chiffre a une signification différente selon sa position dans l'écriture du nombre (Dans 1979, le 9 de gauche vaut 9, mais le 9 de droite vaut 900).

Ainsi, chaque chiffre a un poids.
$1979 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 9 \times 1 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$.

Généralisation :
On peut généraliser l'écriture dans nombre dans une base *b* quelconque de cette manière :
Soient a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n des symboles issus de la banque de symbole de notre base *b*.

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

Nous allons voir comment utiliser cela.

I. Trois bases utiles

I.1. La base 10

La base décimale est la base que nous utilisons le plus.
Comme nous l'avons vu, si un nombre entier s'écrit $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ où a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n sont des chiffres pris dans l'ensemble $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$, alors

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

Ainsi, le chiffre a_k a un poids de 10^k.

I.2. La base 2 (binaire)

La base 2 est la plus petite base possible.
Les symboles utilisés sont le 0 et le 1 (que l'on nomme **bit**, contraction des mots ***bi**nary digi**t***).

Elle est très utile en informatique et en électronique car on peut lier ces 2 symboles à deux états (le courant ne passe pas : 0, le courant passe : 1) qui est le mode de fonctionnement du transistor (voir en annexe pour le fonctionnement d'un transistor).
Pour information, un processeur de type Ryzen 7 possèdent presque 6 milliards de transistors.

Explication :

$$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 13$$

On pourra écrire : $(1011)_2 = (13)_{10}$.

Définition :

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont n bits (chiffres 0 ou 1), alors le nombre $(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0)_2$ vaut

$a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$ en base 10.

La puissance de 2 associée à chaque bit s'appelle son poids : a_i "pèse" 2^i

Remarque : Premières puissances de 2 à connaitre :

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Les premiers nombres en binaire :

Base 10	Binaire
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111

Base 10	Binaire
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Définition :

Un octet est un mot formé de 8 bits. Lorsqu'on écrit un entier en binaire sur un ou plusieurs octets, on peut être amené à rajouter des 0 à gauche : $(0001\ 1111)_2 = 31$

I.3. La base 16 (hexadécimale)

La base a plusieurs intérêts pour nous. Elle permet une écriture compacte de grands nombres et aussi avoir une conversion simple avec le système binaire.
Pour compter en base 16, on a besoin de 16 symboles. Comme nous ne disposons que de 10 chiffres, nous allons rajouter les 6 premières lettres de notre alphabet.
Ainsi, nous utiliserons les symboles suivants : $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9; A; B; C; D; E; F\}$.
On a donc des symboles allant de 0 à 15 !

Le fonctionnement est identique aux autres bases :

$$(3C8)_{16} = 3 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 968$$

Remarque : Premières puissances de 16:

16^0	16^1	16^2	16^3	16^4
1	16	256	4096	65536

Les premiers nombres en hexadécimale :

Base 10	Hexadécimale
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B

Base 10	Hexadécimale
12	C
13	D
14	E
15	F
16	10
17	11
18	12
19	13
20	14
21	15
22	16
23	17

Exemple d'utilisation du codage hexadécimal : le codage des couleurs.

Les couleurs d'un pixel sont codées sur 24 bits qui se décomposent en 3 fois 8 bits :

- 8 bits sont consacrés à la teinte primaire **rouge** ;
- 8 bits sont consacrés à la teinte primaire **vert** ;
- 8 bits sont consacrés à la teinte primaire **bleue**.

Une séquence de 8 bits permet de coder un nombre entier compris entre 0 et $V_{\max} = 255$: en effet, 2^8 vaut 256. Par conséquent, la valeur de la composante rouge d'un pixel peut être représentée selon 256 niveaux différents (allant du 0, absence de rouge, à 255, rouge d'intensité maximum). Et il en est de même pour les 2 autres composantes primaires, le vert et le bleu.

Donnons un exemple : le carré ci-contre est formé de pixels d'une couleur uniforme dont les caractéristiques RVB (ou RGB en anglais) sont les suivantes :

- composante rouge : 251, soit en codage binaire (sur 8 bits) 11111011 ;
- composante verte : 208, soit 11010000 ;
- composante bleue : 151, soit 10010111.

Le codage binaire sur 24 bits de cette couleur est donc le suivant :

1111 1011 1101 0000 1001 0111.

Codage hexadécimal beaucoup plus compact : F B D 0 9 7

II. Conversion et changement de base

II.1. Vers la base 10

II.1.a. De la base 2 à la base 10

$$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = (13)_{10}$$

Exercice 1:

Écrire ces nombres dans la base 10 :

$(10110)_2 =$

$(111011)_2 =$

II.1.b. De la base 16 à la base 10

$$(3C8)_{16} = 3 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 968$$

Exercice 2:

Écrire ces nombres dans la base 10 :

$(135)_{16} =$

$(4C)_{16} =$

$(F2)_{16} =$

II.2. Vers la base 2

II.2.a. De la base 10 vers la base 2

Méthode 1 : Par divisions successives

On va effectuer des divisions euclidiennes par 2 de notre nombre à convertir puis des quotients.

Exemple :

Convertissons $(41)_{10}$ vers la base 2 :

Attention à ne pas vous tromper dans le sens de lecture !!!

Méthode 2 : Les plus grandes puissances

On effectue la division euclidienne de notre nombre par la plus grande puissance de 2 qui lui est inférieure ou égale, puis on recommence avec le reste, et ainsi de suite.

Exemple :
Convertissons $(41)_{10}$ vers la base 2 :
La puissance de 2 inférieure ou égale à 41 est : $2^5 = 32$.
On a :
$41 = 2^5 + 9$
$9 =$

Exercice 3:
Écrire en base 2 les nombres suivants :
$(67)_{10}$ *et* $(123)_{10}$
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

II.2.b. De la base 16 vers la base 2

On va utiliser le tableau de conversion suivant :

Base 16	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Base 16	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Base 2	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Exemple :

$$(2C8)_{16} = (0010\ 1100\ 1000)_2 = (1011001000)_2$$

Exercice 4:

Écrire en base 2 les nombres suivants :

$(E67)_{16}$ *et* $(1D9A)_{16}$

………

………

………

………

………

II.2. Vers la base 16

II.2.a. De la base 10 vers la base 16

Méthode 1 : Par divisions successives

On va effectuer des divisions euclidiennes par 16 de notre nombre à convertir puis des quotients.

Rappel :

16^0	16^1	16^2	16^3	16^4
1	16	256	4096	65536

Exemple :

Convertissons $(41)_{10}$ vers la base 16 :

Attention à ne pas vous tromper dans le sens de lecture !!!

Méthode 2 : Les plus grandes puissances

On effectue la division euclidienne de notre nombre par la plus grande puissance de 6 qui lui est inférieure ou égale, puis on recommence avec le reste, et ainsi de suite.

Rappel :

16^0	16^1	16^2	16^3	16^4
1	16	256	4096	65536

Exemple :
Convertissons $(2022)_{10}$ vers la base 16 :
La puissance de 16 inférieure ou égale à 2022 est : $16^2 = 256$.
On a :
$2022 = 7 \times 16^2 + 230$
$230 =$

Exercice 5:
Écrire en base 16 les nombres suivants :
$(67)_{10}$ *et* $(10\,000)_{10}$
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

II.2.b. De la base 2 vers la base 16

On va utiliser le tableau de conversion suivant :

Base 16	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Base 16	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Base 2	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Il sera peut-être nécessaire de rajouter des 0 à gauche de notre nombre en base 2 afin d'avoir des paquets de 4 chiffres complets.

Exemple :

$$(110111)_2 = (0011\ 0111)_2 = (37)_{16}$$

Remarque :
On voit que les conversions base 2/base 16 sont très simples et rapide.

Exercice 6:
Écrire en base 16 les nombres suivants :
$(1011111)_2$ *et* $(1100111000111100)_2$

……

……

……

……

……

III. Conversion de nombres décimaux

Nous avons vu défini les écritures binaire, décimal et hexadécimale d'un nombre entier. On peut écrire tout nombre réel en base 2, 10 ou 16.

Rappel pour la base 10 :
Un nombre en base 10 se décompose comme suit :
$(347{,}258)_{10} = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10^1} + 5 \times \frac{1}{10^2} + 8 \times \frac{1}{10^3}$

On va généraliser cette écriture à toutes les bases :

Propriétés :
Soient a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n et b_1, …, b_{m-1}, b_m des symboles issus de la banque de symbole de notre base b.

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_m)_b$$
$$= a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0 + b_1 \times \frac{1}{10^1} + \dots + b_m \times \frac{1}{10^m}$$

Méthode vers base 2 :
Pour convertir 7,625 on va s'occuper de la partie entière 7 comme vu plus haut, et pour la partie décimale 0,625 , nous ferons des multiplications successives par 2.
$7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ cela donne 111 en base 2.
Pour 0,625 :

$0.625 \times 2 = 1.25 > 1 \rightarrow$	1	$0.625 = \frac{1.25}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0.25}{2}$
$0.25 \times 2 = 0.5 < 1 \rightarrow$	0	
$0{,}5 \times 2 = 1 \rightarrow$	1	

$(0{,}625)_{10} = (0{,}101)_2$

On a donc : $(0{,}625)_{10} = (111{,}101)_2$

Méthode vers base 16 :
Nous allons faire la même chose avec des multiplications successives par 16.
Pour 0,234375 :

$0{,}234375 \times 16 = 3{,}75 > 1$ →	3
$0.75 \times 16 = 12$ →	C

On a donc : $(0{,}234375)_{10} = (0{,}3C)_2$

Exercice 7 :
Écrire en base 2 puis 16 les nombres suivants : $(4{,}75)_{10}$ *et* $(25{,}25)_{10}$

IV. Opérations élémentaires

IV.1. Addition

Exemple base 2 : $(101)_2 + (1110)_2 = ?$ $\begin{array}{rrrrr} & & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$ $(101)_2 + (1110)_2 =$	Exemple base 16 : $F + C = 1B = 15 + 12 = 27 = 16 + 11$: je pose B et je retiens 1) $\begin{array}{rrrrr} & 1 & E & 7 & F \\ + & 1 & B & 5 & C \\ \hline \end{array}$ $(1E7F)_{16} + (1B5C)_{16} =$

IV.2. Soustraction

Exemple en base 2 : $(10110)_2 - (111)_2 = ?$ $\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ $(10110)_2 + (111)_2 =$	Exemple en base 16 : $(2B12)_{16} - (FC0)_{16} = ?$ $\begin{array}{rrrrr} & 2 & B & 1 & 2 \\ - & & F & C & 0 \\ \hline \end{array}$ $(2B12)_{16} + (FC0)_{16} =$

IV.3. Multiplication

Le principe est identique à la multiplication en base 10.

$1011 \times 101 = ?$

		1	0	1	1
	×		1	0	1
		1	0	1	1
	0	0	0	0	.
1	0	1	1	.	.
1	0	1	1	1	1

$1011 \times 101 =$

<table>
<tr>
<td>

$(F3)_{16} - (2A)_{16} = ?$

		F	3
	×	2	A
	9	7	E
1	E	6	.
2	7	D	E

$(F3)_{16} - (2A)_{16} =$

</td>
<td>

$(A)_{16} \times (3)_{16} = 10 \times 3 = 30 = (1E)_{16}$
$(A)_{16} \times (F)_{16} = 10 \times 15 = 150 = (96)_{16}$ avec la retenue, on obtient $(96)_{16} + (1)_{16} = (97)_{16}$
$(2)_{16} \times (3)_{16} = 2 \times 3 = 6 = (6)_{16}$
$(2)_{16} \times (F)_{16} = 2 \times 15 = 30 = (1E)_{16}$

</td>
</tr>
</table>

IV.4. Division

La division se mène comme la division en base 10.

$(1110)_2 \div (10)_2 = ?$

Exercice 8 :
Effectuez les calculs suivants :
a. Soit $a = (1011111)_2$ *et* $b = (100110)_2$. *Calculer* $a + b$, $a - b$, ab *et* $a \div b$.
b. Soit $a = (1B4)_{16}$ *et* $b = (37)_{16}$. *Calculer* $a + b$, $a - b$ *et* ab.

V. Précision et arrondi

Rappel pour la base 10 :
Considérons le nombre $N = 512{,}735$.
- L'arrondi à 10 près de N est 510 (car N est plus proche de 510 que de 520).
- L'arrondi à 1 près de N est 513 (car N est plus proche de 513 que de 512).
- L'arrondi à 0,1 près de N est 512,7 (car N est plus proche de 512,7 que de 512,8).
- L'arrondi à 0,01 près de N est de 512,74 (ce nombre est aussi proche de N que 512,73, donc on prend le plus grand).

On peut généraliser cette notion d'arrondi aux nombres réels écrits dans n'importe quelle base.

V.1. Arrondi en base 2

Considérons $N = (101{,}10011)_2$.
- L'arrondi à $(10)_2$ près de N est $(110)_2$ car N est plus proche de $(110)_2$ que de $(100)_2$.
- L'arrondi à $(1)_2$ près de N est $(101)_2$ car N est plus proche de $(101)_2$ que de $(100)_2$.
- L'arrondi à $(0{,}1)_2$ près de N est $(101{,}1)_2$ car N est plus proche de $(101{,}1)_2$ que de $(101{,}0)_2$.

V.2. Arrondi en base 16

Considérons $N = (B82A, 7AB)_2$.
- L'arrondi à $(100)_{16}$ près de N est $(B800)_{16}$ car N est plus proche de $(B800)_{16}$ que de $(B900)_{16}$.
- L'arrondi à $(10)_{16}$ près de N est $(B830)_{16}$ car N est plus proche de $(B830)_{16}$ que de $(B820)_{16}$.
- L'arrondi à $(0{,}1)_{16}$ près de N est $(B82A, 8)_{16}$ car N est plus proche de $(B82A, 8)_{16}$ que de $(B82A, 7)_{16}$.

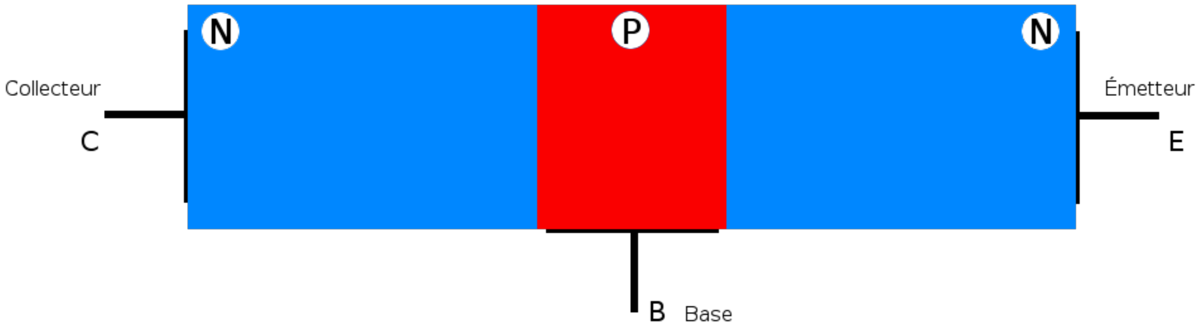
Exercice 9 :
a. Quel est l'arrondi de $(1101011)_2$ *à* $(100)_2$ *près.*
b. Quel est l'arrondi de $(10{,}011)_2$ *à* $(0{,}1)_2$ *près.*
c. Quel est l'arrondi de $(A, BB)_{16}$ *à* $(0{,}1)_{16}$.

ANNEXE

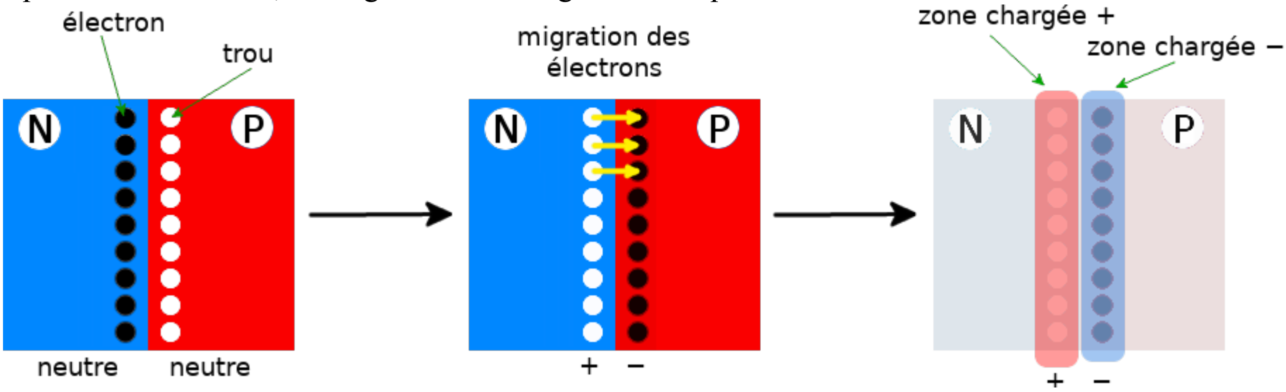
Fonctionnement d’un transistor

Le transistor est l’élément de base des processeurs de vos ordinateurs et smartphone.
C’est un composant à trois bornes qui est composé de deux diodes PN collées dos à dos de façon à former soit une suite **NPN** soit une suite **PNP** si on les accole dans l’autre sens. **NPN et PNP sont deux types de transistors.**

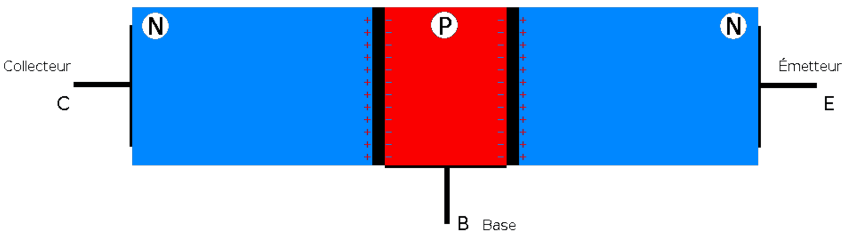
Le transistor est un *tripôle* correspondant à une juxtaposition de semi-conducteurs dopés N et P. Dans ce qui suit, on prendra comme base le transistor NPN en silicium.
Dans les faits, c’est un sandwich de silicium P entre deux tranches de silicium N :



Le fait que l’on utilise des semi-conducteurs dopés différemment, on observe plusieurs phénomènes dans le transistor, notamment aux **jonctions NP et PN**.
Souvenez-vous, les semi-conducteurs dopés N sont surchargés d’électrons : le cristal de semi-conducteur contient des électrons « libres » entre les atomes. Les semi-conducteurs dopés P contiennent des trous d’électrons : des emplacements où se trouve une liaison cristalline mais où il manque un électron.
Aux jonctions, et *uniquement* aux jonctions, certains électrons de la partie N va aller boucher les trous de la partie P. Ce déplacement d’électrons au sein du cristal de silicium dopé va générer des régions chargées au niveau des jonctions.
Bien que non conductrice, ces régions sont chargées électriquement :



À ce stade, le transistor n’est pas encore branché dans un circuit : les zones chargées sur les jonctions sont présentes de façon naturelle au sein de la matière qui compose le transistor, simplement parce que des électrons se sont déplacés :



Ce phénomène de productions de zones chargées au niveau des jonctions est **cruciale pour le fonctionnement du transistor**. En fait, c'est là que naissent toutes les propriétés électroniques des transistors.

Fonctionnement d'un transistor

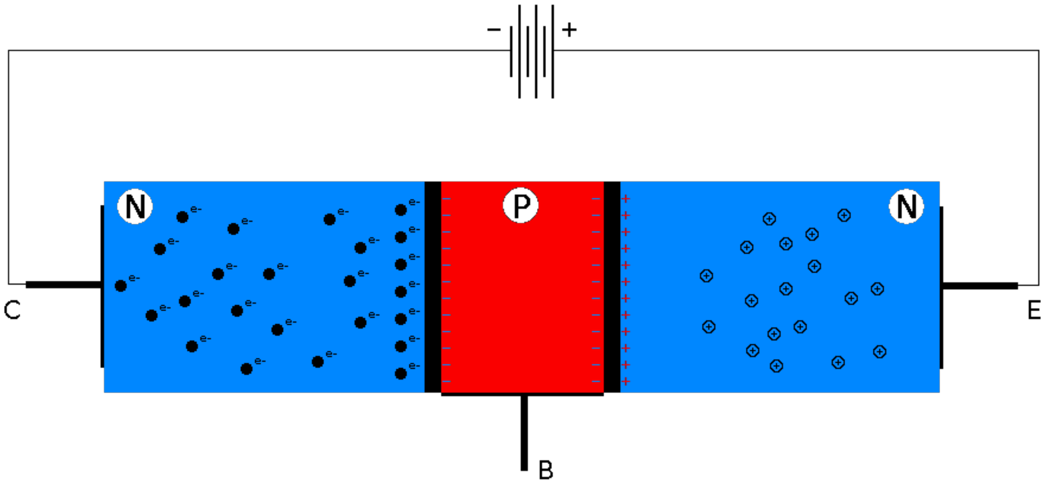
Voyons ce qui se passe quand on branche le transistor dans un circuit.

Le transistor dispose de trois bornes :

- le collecteur ;
- la base ;
- l'émetteur.

Le collecteur et l'émetteur sont techniquement symétriques. La base est est un peu particulière.

Commençons par brancher le collecteur et l'émetteur dans un circuit et à mettre le courant (on considère que la base n'est reliée à rien du tout).



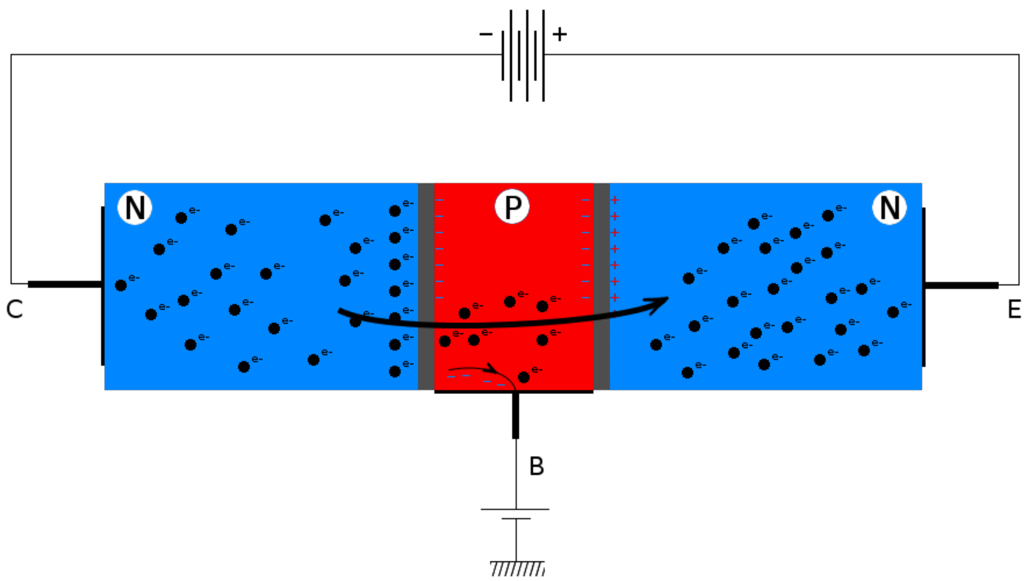
Les premiers électrons qui vont arriver au collecteur vont être naturellement attirés par la région positivement chargée près de la jonction NP.

Une fois que cette région sera occupée par les électrons, ces derniers vont se retrouver devant à un mur : ils seront repoussés par la région négative dans la partie P du transistor. Les électrons ne peuvent donc pas passer vers l'émetteur.

De l'autre côté, les électrons de l'émetteur finissent par être aspirés dans le circuit laissant place à des « vides d'électrons » : des trous, chargés positivement (du fait du départ des électrons négatifs), mais ils sont également attirés par la région positivement chargée à la jonction PN. De ce fait, le courant ne passe pas là non plus.

À ce stade, le transistor bloque complètement la circulation du courant.

Maintenant, mettons la base du transistor sous tension et observons ce qui se passe :



À cause de cette tension positive sur la base, des électrons commencent par être retirés de la base.
La conséquence de cela, c'est que les électrons du collecteur (à gauche) **ne subissent plus de répulsion** et ils peuvent maintenant se mettre à circuler entre le collecteur et l'émetteur.
En arrivant sur l'émetteur, les électrons vont boucher les trous (qui sont positifs), puis vont pouvoir passer dans le circuit.
La simple présence du courant sur la base suffit à supprimer la barrière d'électrons qui empêchait le courant principal entre le collecteur et l'émetteur de passer. Si on supprime ce courant de la base, les électrons qui vont arriver par le collecteur vont s'arrêter au niveau des trous dans la région P et finir de nouveau par bloquer le courant entre le collecteur et l'émetteur !

On a donc un comportement très particulier :

- en appliquant une petite tension à la base, le courant principal entre le collecteur et l'émetteur peut passer ;
- en supprimant cette tension à la base, le courant entre le collecteur et l'émetteur est coupé.

Ce comportement peut sembler anodin, mais il ne l'est pas : cet effet, parfois nommé **effet transistor** permet de contrôler un courant principal (circuit CE) avec un petit courant secondaire (sur la borne B). Il s'agit donc d'un sorte d'interrupteur électronique.

Le transistor est un interrupteur contrôlé électroniquement, sans partie mécanique.