Chapitre II

Arithmétique - 1

Contenus

- Division euclidienne : quotient, reste, existence, unicité.
- Nombres premiers, décomposition en produit de facteurs premiers, entiers premiers entre eux, PGCD de deux entiers.

Capacités

- Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers et déterminer tous ses diviseurs.
- Mettre en œuvre un algorithme :
  - de recherche de nombres premiers ;
  - de décomposition en produit de facteurs premiers.

Table des matières

I. Division euclidienne

I.1. Définition, existence, unicité

Définition :
Soient deux entiers naturels a et b.
Effectuer la division euclidienne de a par b consiste à déterminer les deux entiers q et r tels que :

$$a = b \times q + r \qquad avec \quad 0 \leq r < b$$

a est appelé le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Exemple : Effectuons la division euclidienne de 23 par 4 :

Remarque :
Pour calculer le quotient et le reste à la calculatrice, on utilise les égalités suivantes :
$q = E\left(\frac{a}{b}\right)$ *où E est la fonction « partie entière » et $r = a - b \times q$.*

Théorème
Pour tous entiers naturels a et b, il existe un **<u>unique</u>** couple (q, r) d'entiers naturels tels que

$$a = b \times q + r \qquad avec \quad 0 \leq r < b$$

I.2. Comment faire une division euclidienne

Méthode 1 : poser la division :

Cette méthode consiste à calculer le quotient chiffre par chiffre en commençant par la gauche.

Exemple : Effectuons la division euclidienne de 1790 par 3 :

$$1790 \div 3 \approx 596.66\underline{6}\ldots$$
$$donc\ q = E(596.66\underline{6}\ldots) = 596$$

Par suite :

$$\begin{aligned} r &= 1790 - 3 \times 596 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$1790 = 3 \times 596 + 2$$

Méthode 2 : utilisée pour programmer un algorithme de division euclidienne sur ordinateur :

Une manière naturelle pour calculer le quotient est de se demander combien de fois on peut mettre b dans a.

Pour répondre à cette question, on commence à regarder si a est strictement inférieur à b. Si c'est le cas, alors $q = 0$ et $r = a$.
Sinon, on soustrait b à a autant de fois que nécessaire pour que le résultat devienne strictement inférieur à b. Le nombre de soustractions effectuées est alors q et le résultat obtenu après la soustraction est r.

II. Multiples et diviseurs

II.1. Définitions, exemples

Définition :
Soient a et b des entiers naturels.
Ii il existe un entier naturel q tel que : $a = b \times q$, on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a

Exemples :

a) 7 est un ……………………………… de 56.
b) 48 est un ……………………………… de 6.
c) Tout entier naturel est ………………………… de 1.
d) Liste des diviseurs de 15 : ………………………………………………………….

Remarque : *Tout entier naturel n admet au moins comme diviseur 1 et lui-même n.*

Propriétés :

- Un nombre est multiple de 2 si : …………………………………………………………………………………………….
- Un nombre est multiple de 3 si : …………………………………………………………………………………………….
- Un nombre est multiple de 5 si : …………………………………………………………………………………………….

II.2. PGCD

Définition
Le PGCD de a et b, noté $PGCD(a, b)$, est le plus grand diviseur commun à a et à b.

Exemple :
Calculons le PGCD de 35 et de 56 :

- 35 a pour diviseurs ………………………………………………………….
- 56 a pour diviseurs ………………………………………………………….

On a donc : $PGCD(35,56) =$ ……………………………….

Algorithme d'Euclide :

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux entiers a et b.
Pour cela, on effectue la division euclidienne de a par b, puis de b par le reste obtenu et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul.
Le dernier reste non nul est alors le PGCD de a et de b.

Exemple :
Calculons le PGCD de 35 et de 56 :

Dividende	**Diviseur**	**Quotient**	**Reste**

<u>**Exemple**</u> : Calculer le PGCD de 48 et 56 par les deux méthodes.
………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Nombres premiers

III.1. Reconnaissance des nombres premiers

Un entier naturel est premier s'il a **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur : 1.
- 2 est premier car il a exactement deux diviseurs : 1 et 2.
- 3 est premier car il a exactement deux diviseurs : 1 et 3.
- 4 n'est pas premier car il a 3 diviseurs : 1, 2 et 4.

Conseil :
Mémorisez les nombres premiers inférieurs à 20, ils vous seront utiles par la suite :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Théorème :
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Si n n'est pas premier, alors n possède au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Ce théorème permet d'avoir un critère de reconnaissance des nombres premiers : pour savoir si un nombre n est premier, on calcule $\sqrt{n}$. Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est premier.

Application :
Cherchons si 347 et 713 sont des nombres premiers :

- $\sqrt{347} \approx 18{,}6$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18,6 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17. 347 n'est divisible par aucun de ces nombres donc 347 est un nombre premier.
- $\sqrt{713} \approx 26{,}7$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 26,7 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. 713 est divisible par 23 donc 713 n'est pas premier.

III.2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété :
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombre premier.

Ex. : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs premiers de 360 sont 2, 3 et 5.

Méthode :
Décomposer N=660 en produit de facteur premier.

Correction :
Ce que l'on cherche à faire:

A écrire 660 sous la forme $p_1 \times p_2 \times \ldots$ *où* $p_1, p_2, \ldots$ *sont des nombres premiers.*

- *On regarde si 660 est divisible par 2 (le premier des nombres premiers), si c'est le cas, on effectue la division de 660 par 2. Puis on regarde si le quotient de 330 par 2 est aussi divisible par 2, et on poursuit jusqu'à ce que le quotient ne soit plus divisible par 2.*
- *On effectue la même chose avec 3 (2ème nombre premier) puis pour les autres nombres premiers jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.*

$$\begin{array}{r|l} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Donc, $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$.

TD

Exercice 1.

Écrire la division euclidienne de :

a) 932 par 7 b) 2015 par 7 c) 35 par 269 d) 3456 par 19 e) 4567 par 21

Exercice 2.

Pour Halloween, Bob doit livrer 1976 kg de citrouilles. Malheureusement, sa camionnette est très petite, et il ne peut transporter que 28 kg de citrouilles par trajet.

Combien de trajets va devoir effectuer Bob au minimum ?

La camionnette de Bob est pleine à chaque trajet, sauf au dernier.

Combien Bob transporte-t-il de kilos de citrouille lors de son dernier trajet ?

Exercice 3.

Le 25 septembre 2015 était un vendredi. Quel jour était le 25 septembre 2016 (Attention, l'année 2016 est bissextile.) ? Et quel jour était le 25 septembre 2017 ?

Exercice 4.

a) Donner la liste des multiples de 0.

b) Donner la liste des diviseurs de 56.

c) Déterminer le chiffre X pour que le nombre 712X soit divisible par 9.

Exercice 5.

On cherche un nombre multiple de 21 dont le quotient de la division par 35 vaut 33.

Quelles sont les possibilités ?

Exercice 6.

Quels sont les entiers positifs dont le quotient de la division par 5 est égal au triple du reste ?

Exercice 7.

Convertir 9762 secondes en heures, minutes et secondes.

Exercice 8.

Démontrer que la somme de 3 nombres consécutifs est toujours un multiple de 3.

Exercice 9.

a) Combien y a-t-il de multiples de 17 entre 1000 et 2600 ?

b) Combien y a-t-il de multiples de 13 entre 2000 et 3000 ?

Exercice 10.

a) Développer $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

b) Déterminer en fonction de x un diviseur de $x^6 - 1$.

c) Sans calculatrice, donner un diviseur de $37^6 - 1$.

Exercice 11.
Déterminer le PGCD de :
a) 13 et 39, b) 30 et 42, c) 245 et 120, d) 336 et 70.

Exercice 12.
Alan dispose de 280 roses et de 490 œillets.
En utilisant toutes les fleurs quel est le plus grand nombre de bouquets (tous identiques) qu'il pourra créer et quel est leur composition?

Exercice 13.
Bob veut carreler la totalité d'une pièce de 3,51 m de long par 2,86 m de large en utilisant des dalles carrées les plus grandes possibles et dont le côté fait un nombre entier de centimètres.
Combien de dalles va-t-il utiliser ?

Exercice 14.
Un tournoi de handball mixte est organisé. 81 personnes s'inscrivent dont 63 garçons.
Les organisateurs veulent créer le plus grand nombre possible d'équipes en utilisant tout le monde, les équipes devant toutes contenir le même nombre de garçons.
Combien y aura t-il de garçons par équipe ?

Exercice 15.
Les nombres suivants sont-ils premiers ? Si oui dire quel est le dernier diviseur testé, si non, donner un diviseur.
107 – 161 – 179 – 241 – 311 – 323 – 437 – 563 – 677 – 779 – 971

Exercice 16.
Pour tout entier naturel *n*, on pose : $A_n = n^2 + n + 17$.
a. Vérifiez que, pour tout *n* de 0 à 15, A_n est un nombre premier.
b. Montrer que A_{16} n'est pas premier.

Exercice 17.
On se propose de chercher s'il existe des nombres premiers de la forme $n^2 - 4$, pour *n* entier naturel supérieur ou égal à 3, et si possible, d'en faire la liste. On note A_n le nombre $n^2 - 4$.
a. Tester si A_n est premier pour n valant 3, 4, 5, 6 et 7.
b. Montrer que, à part pour n=3, A_n n'est jamais premier.

Exercice 18.
Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants : a) 1 150, b) 1 360.

Exercice 19.
a. Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 350.
b. Quel est le plus petit entier naturel par lequel il faut multiplier 350 pour obtenir le carré d'un nombre entier ?

Exercice 20.

a. Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 22 869.

b. Quel est le plus petit entier naturel par lequel il faut multiplier 22 869 pour obtenir le carré d'un nombre entier ?

Exercice 21.

Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers et déterminer leur PGCD dans les cas suivants :

a. $a = 96$ et $b = 728$

b. $a = 1\ 071$ et $b = 2200$

TD plus long

Exercice 1 :

Pour des questions de saisie, les billets en euros sont tous numérotés. Le numéro est constitué d'une lettre suivie de 11 chiffres.
On commence par remplacer la lettre de son rang dans l'alphabet (A=1, B=2, C=3, D=4, … , Z=26) puis on additionne ce nombre avec les 11 autres chiffres du billet.
Le reste de la division par **9** de ce résultat doit être **8**, sinon le billet est faux.
Par exemple, vérifions un billet numéroté z10708476264.
On remplace la lettre z par 26 et on additionne 26+1+0+7+0+8+4+7+6+2+6+4=71.
Le reste de la division euclidienne de 71 par 9 est bien 8. Ce billet est vrai.

a. Des billets numérotés v02387040334 et m12065974438 sont-ils vrais ?
b. Sur un billet authentique figure le numéro s0216644810♣ mais le dernier chiffre est illisible. Quel est ce chiffre ?
c. Sur un autre billet authentique, ma lettre est illisible ♣16122340242. Quels sont les lettres possibles ?
d. Ce moyen de contrôle n'est pas assez poussé. En effet, pour un billet, un opérateur peut faire une faute de saisie sur un chiffre sans que celle-ci ne soit détectée ! Donner un exemple d'erreur de saisie non détectée sur un billet numéroté x30564853796.

Exercice 2 :
Le code-barres rencontré au supermarché est le code EAN-13 formé de 13 chiffres. Le dernier chiffre est une clé de contrôle calculée à partir des 12 autres.
Pour calculer cette clé de contrôle :

- On multiplie par 3 chaque chiffre de rang pair, on ajoute tous les résultats et on ajoute tous les chiffres de rang impair.
- On calcule le reste dans la division par 10 de la somme obtenue.
- Si le reste est 0, la clé est 0 sinon on retranche le reste à 10 pour avoir la clé.

Par exemple, prenons le code-barres 471-9-5120-0288-x (où x est la clé de contrôle que l'on cherche).

Chiffre	**4**	**7**	**1**	**9**	**5**	**1**	**2**	**0**	**0**	**2**	**8**	**8**
Coef. multiplicateur	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Résultat	**4**	**21**	**1**	**27**	**5**	**3**	**2**	**0**	**0**	**6**	**8**	**24**

La somme vaut $4+21+1+27+5+3+2+0+0+6+8+24=101$, le reste dans la division par 10 est 1 donc la clé est $10-1=9$.
a. Quelle est la clé de contrôle des codes-barres suivants, 4 971850 13816 x et 6 547531 18367 x ?
b. Peut-on trouver le chiffre manquant dans les codes-barres suivants, 9 782216 1♣247 4 et 3 2821♣2 62913 4 ?