BTS SIO – 1

Chapitre III

Logique – 1 (Proposition et prédicat)

Contenus

Calcul propositionnel

- Proposition, valeur de vérité.
- Connecteurs logiques :
  - négation ($non\ P$, $\neg P$, $\bar{P}$) ;
  - conjonction ($P\ et\ Q$, $P \wedge Q$) ;
  - disjonction ($P\ ou\ Q$, $P \vee Q$) ;
  - Implication ;
  - équivalence.
- Prédicat :
  - Variable, constante. Quantificateurs ∀, ∃.
  - Négation de ∀x, p(x) ; négation de ∃x, p(x).

Capacités

- Traiter un exemple simple de calcul portant sur un énoncé.
- Utiliser des connecteurs logiques pour exprimer une condition.
- Passer du langage courant au langage mathématique et inversement.
- Exprimer, dans un cas simple, la négation d'un prédicat.

Table des matières

I. Proposition

I.1. Définition

Définition
Une proposition est un énoncé dont on peut dire avec certitude si il est vrai ou faux.
VRAI et **FAUX** sont appelés les valeurs de vérité d'une proposition.

Exemple :

- $4 = 9$ est une proposition car on peut dire avec certitude qu'elle est fausse. Sa valeur de vérité est donc **FAUX**.
- $3 + 5 < 10$ est une proposition. Sa valeur de vérité est **VRAI**.
- « Grenoble est dans l'Isère » est une proposition dont la valeur de vérité est **VRAI**.
- « Je vais gagner au loto » ou « demain il fera beau » ne sont pas des propositions.
- Les énoncés en langage Python, « `6*5==30` » ou « `7 !=7` », sont aussi des propositions. La première a une valeur de vérité **VRAI** et la seconde **FAUX**.

I.2. Connecteurs logiques

Un connecteur logique binaire est une règle qui associe à deux propositions P et Q une nouvelle proposition en déterminant si elle est vraie ou fausse, en fonction des valeurs de vérités de P et de Q.

1.2.a. Négation

La négation d'une proposition P que l'on note **non(P)** est définie par la table de vérité suivante :

P	**Non(P)**
FAUX	VRAI
VRAI	FAUX

On peut résumer cela dans une table, dite **table booléenne**, en remplaçant Vrai et Faux par 1 et 0. *(G. Boole, Angleterre, 1815-1864).*

P	***Non*(*P*)**
1	0
0	1

Remarques :

- *On peut aussi la noter* $\overline{P}$ *ou* $\neg P$.
- $\neg(\neg P) = P$
- *En Python, la négation s'exprime avec l'opérateur « not » :*

```
>>>A=(2==2)          # la variable A prend la valeur (2==2)
>>>A                 # appel de la valeur 1
TRUE
>>>not(A)            # appel de la valeur de not(A)
FALSE
```

Exemple :

Si P est la proposition « Il pleut », ¬P est la proposition ....

I.2.b. Conjonction

Définition

La conjonction de deux propositions P et Q, notée $P \wedge Q$ (prononcer « P et Q »), est la proposition qui n'est vraie que si P et Q sont vraies toutes les deux. La table de vérité de $P \wedge Q$ est donnée par:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Remarque :

En Python, la conjonction s'exprime avec l'opérateur « and ».

```
>>>(4==4) and (7 !=7)        # 4==4 est vrai et 7 !=7 est faux
False

>>>(4<5) and (7<12)          # 4<5 est vrai et 7<12 est vrai
TRUE
```

Exemple :

Si P est la proposition « Il pleut » et si Q est la proposition « Il fait moins de 12 degrés », P ∧ Q est la proposition ....

I.2.c. Disjonction

Définition

La disjonction de deux propositions P ou Q, notée P ∨ Q ou « P ou Q », est la proposition qui est vraie si au moins une des deux assertions P ou Q est vraie. La table de vérité de P ∨ Q est donnée par :

P	Q	$P \vee Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Remarque :
En Python, la conjonction s'exprime avec l'opérateur « or ».

```
>>>(4==4) or (7 !=7)          # 4==4  est vrai et  7 !=7  est faux
TRUE

>>>(4>5) or (7>12)            # 4>5  est faux et 7>12 est faux
FALSE
```

I.2.d. Implication

Définition

La proposition « P implique Q », notée P ⇒ Q, est la proposition qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. La table de vérité de P ⇒ Q est donnée par :

P	Q	$P \implies Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Remarques :

- *En Python, l'implication ⇒ s'exprime avec l'opérateur « <= ».*

```
>>>(3==2) <= (5<7)            # 3==42  est faux et  5<7  est vrai
TRUE

>>>(2<5) <= (7>12)            # 2<5  est vrai et 7>12 est faux
FALSE
```

- la négation de "P implique Q" est "P et (non Q)".

Exemple :
La proposition « 5<5 ⇒ 5=5 » est vraie car le faux implique le vrai mais la proposition « 5=5 ⇒ 5<5 » est fausse.

I.2.e. Équivalence

Définition

L'équivalence logique de deux propositions P et Q, notée P ⇔ Q est la proposition qui n'est vraie que si P et Q sont vraies simultanément ou fausses simultanément. La table de vérité de P ⇔ Q est donnée par :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

- $(P \Leftrightarrow Q)$ *est équivalent* $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

M	N	$M \Longrightarrow N$	$N \Longrightarrow M$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$	$M \Leftrightarrow N$
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

- La négation de "P et Q sont équivalentes" est "l'une des propositions est vraie et l'autre est fausse".

II. Propriétés des connecteurs binaires

II.1. Compléments

Remplir les tables de vérité si dessous :

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0		
1		

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0		
1		

Conclusion :

$P \vee (\neg P)$ est toujours ………………………, et $P \wedge (\neg P)$ est toujours ……………………… .

II.2. Commutativité

Propriété

L'ordre des éléments n'influence pas la valeur d'une conjonction ou d'une disjonction :

1) $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ ont la même valeur de vérité.

2) $P \vee Q$ et $Q \vee P$ ont la même valeur de vérité

II.3. Associativité

Propriété

Si on a plusieurs conjonctions, ou plusieurs disjonction, l'ordre dans lequel on effectue les opérations n'a pas d'importance.

1) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.

2) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.

II.4. Distributivité

Propriétés :
Les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributive l'une par rapport à l'autre :
1) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
2) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Exemple :
Si on indique : « Pour entrer dans le château, passez le pont-levis et prenez la porte de droite ou la porte de gauche »., il y a deux façons d'entrer dans le château : « passer le pont-levis et prendre la porte de droite, ou bien passer le pont-levis et prendre la porte de gauche ».

Remarque :
Convention : sans parenthèse, le « et » est prioritaire sur le « ou ».

Démonstration de $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$:

P	**Q**	**R**	**Q ∨ R**	**P ∧ (Q ∨ R)**	**(P ∧ Q)**	**(P ∧ R)**	**(P ∧ Q) ∨ (P ∧ R)**	**T**
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

II.5. Contraposée

Définition
$((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ s'appelle la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$.

Propriété
Toute implication est équivalente à sa contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ est toujours vraie (on parle de tautologie).

Exemple
Soit P la proposition « Il pleut » et Q la proposition « Je prends mon parapluie ».
- $P \Rightarrow Q$ est la proposition ....
- $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ est la proposition ....

Les deux sont équivalentes.

Propriété
Toute implication est équivalente à sa contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(P) \text{ ou } Q)$ est toujours vraie (on parle de tautologie).

II.6. Loi de Morgan

La négation de «il fait beau et chaud » n'est pas « il fait moche et froid » mais « il fait moche ou froid ». Ceci est établi par les lois de De Morgan :

$$\overline{M \wedge N} \Leftrightarrow \overline{M} \vee \overline{N}$$

$$\overline{M \vee N} \Leftrightarrow \overline{M} \wedge \overline{N}$$

M	N	$non(M)$	$non(N)$	$\overline{M} \vee \overline{N}$	$M \wedge N$	$\overline{M \wedge N}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

III. Prédicats

Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » et est appelé **quantificateur universel**.
Le symbole $\exists$ signifie « il existe » et est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemples
« $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » se lit « pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ ».
« $\exists x \in \mathbb{N}, n^2 = n$ » se lit « il existe un entier naturel n tel que $n^2 = n$ ».

Dans les énoncés « $x^2 = 9$ », « $x < y$ », « n est divisible par 3 » on trouve des variables (x, y et n).

Ces énoncés ne sont pas des propositions car ils n'ont pas de valeur de vérité. Cependant, en ajoutant des quantificateurs, chacun des énoncés peut devenir une proposition.
Par exemple :

P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2=9$" $\qquad$ Q: "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 9$"

P et Q sont bien des propositions puisque ces énoncés ont un sens et une valeur de vérité : P est fausse car $x^2=9$ n'est pas vrai pour tout réel ($5^2 \neq 9$), tandis que Q est vraie, par exemple $3^2 = 9$.

Une variable est un élément (nombre, matrice, …) pouvant prendre plusieurs valeurs.
Un prédicat est un énoncé sans valeur de vérité, dans lequel intervient au moins une variable, et qui peut devenir une proposition par ajour de quantificateurs.

Exemple :
La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x < 1$» qui signifie « il existe un nombre réel x tel que $x < 1$ » est vraie puisque par exemple $0 < 1$. Cette proposition est constituée d'un quantificateur existentiel et du prédicat « $x < 1$ ».

Attention : l'ordre des quantificateurs a son importance.

Exemple

$$P : "\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x < y" \qquad Q : "\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ x < y"$$

La proposition P signifie : « pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x < y$ ». Celle-ci est vrai puisque quel que soit le réel x, on peut toujours trouver un réel y qui lui est strictement supérieur (en posant par exemple $y = x + 1$).

La proposition Q, signifie : « il existe un réel y tel que pour tout réel x on est $x < y$ ». Cette proposition est fausse car il n'existe aucun nombre réel qui soit supérieur à tous les autres et aussi à lui-même.

Remarque algorithmique :

Que penser de la boucle suivante si le prédicat $p(x)$ est vrai pour toutes les valeurs de x prises au cours de l'algorithme ?

```
Tant que p(x)
        Instructions
Fin Tant que
```

Négation d'un prédicat quantifié :

Comme on l'a vu ci-dessus la négation du fait qu'un prédicat soit vrai pour toutes les valeurs de x se traduit par le fait qu'il existe une valeur de x pour laquelle le prédicat est faux.

$$non(\forall x \in E,\ p(x)\,) \Leftrightarrow \exists x \in E, \mathrm{non}(p(x))$$

De la même manière,

$$non(\exists x \in E,\ p(x)\,) \Leftrightarrow \forall x \in E, \mathrm{non}(p(x))$$

Propriété :

On obtient la négation d'une proposition formée d'une suite de quantificateurs suivie d'un prédicat en changeant les $\forall$ par $\exists$, et les $\exists$ par $\forall$ puis en changeant le prédicat par sa négation.

Exemple :

La négation de "$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x < y$" est "$\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x \geq y$".

Remarque :

Pour montrer qu'une affirmation est vraie, on peut montrer qu'elle est vraie, mais il peut être plus simple de montrer que sa négation est fausse, car un contre-exemple suffit à montrer qu'une proposition est fausse.

TD

Exercice 1 :

Écrire sans implication la proposition «$x > 1 \Longrightarrow\ y = 3$».

Exercice 2 :

On considère la proposition P : «$\forall n\ \in\ \mathbb{N}, \exists\, p\ \in\ \mathbb{N}, n\ =\ 2^p$ ».

Énoncer la négation de P puis donner, en justifiant, la valeur de vérité de P.

Exercice 3 :

L'affirmation « la présente affirmation est fausse » est-elle une proposition ?

Exercice 4 :

On note P et Q les affirmations suivantes :

- P = « Paul aime le foot »
- Q = « Paul aime les maths »

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P, Q et des connecteurs logiques.

- A = « Paul aime le foot mais pas les maths »
- B=« Paul n'aime ni le foot, ni les maths »
- C=« Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot »
- D=« Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot »

Exercice 5 :

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = « $\pi\ =\ 5\ et\ 2\ +\ 3\ =\ 5$»
- B=« π = 5 ou 2 + 3 = 5»
- C=« $\pi\ \approx 3.14\ \Longrightarrow 5 + 6 = 11$»
- D=« $\pi\ = 5 \Longrightarrow 2 + 3 = 5$»
- E=«$4\ = 5\ \Longrightarrow\ A\ est\ vraie$ » (A est la proposition citée plus haut)
- F=«$5\ +\ 5\ =\ 10\ \Leftrightarrow \pi\ =\ 11$ »

Exercice 6 :

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

A=«$11 > 0\ et\ 3 < 2$»

B=«$11\ >\ 0\ ou\ 3\ < 2$»

C=«$3\ > 6\ ou\ 6 >\ 20$»

D=«$3 < 2 \Longrightarrow 5 = 5$»

E=«$4\ \neq 1 \Longrightarrow 4 = 1$»

F=«$4 < 5\ \Leftrightarrow\ 10\ =\ 1\ +\ 9$»

Exercice 7 :

a) Compléter la table suivante :

p	$Non\ (p)$	$Non\ (Non\ (p)\ )$
0		
1		

b) Écrire une conclusion avec un signe d'équivalence

Exercice 8 :

a) Compléter la table suivante :

p	$Non\ (p)$	$p \wedge Non\ (p)$	$p \vee Non\ (p)$
0			
1			

b) Commenter les résultats d'une phrase.

On désigne par $\mho$, respectivement $\mathcal{F}$ la proposition toujours vraie, respectivement toujours fausse. Déduire de la table précédente deux équivalences

Exercice 9 :

Construire la table de la proposition $\overline{p \wedge \overline{q}}$. A quelle proposition est-elle équivalente ?

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p \wedge \overline{q}}.$
0	*0*			
0	*1*			
1	*0*			
1	*1*			

Exercice 10 :

a) Compléter les tables suivantes :

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	*0*	*0*			
0	*0*	*1*			
0	*1*	*0*			
0	*1*	*1*			
1	*0*	*0*			
1	*0*	*1*			
1	*1*	*0*			
1	*1*	*1*			

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
0	*0*	*0*		
0	*0*	*1*		
0	*1*	*0*		
0	*1*	*1*		
1	*0*	*0*		
1	*0*	*1*		
1	*1*	*0*		
1	*1*	*1*		

b) Recommencer en inversant le rôle du « et » et du « ou »

c) Quelles propriétés vient-on de démontrer ?

Exercice 11 :

On définit le connecteur binaire Nand par la table suivante de p Nand q:

p	q	p *Nand* q
0	0	*1*
0	1	*1*
1	0	*1*
1	1	*0*

1. Démontrer que p Nand $\mathrm{q} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}}$
2. Donner une expression équivalente à p Nand q qui utilise le "ou".
3. A quelle proposition est équivalente p Nand p ?
4. Donner une expression simple équivalente à $(\mathrm{p}$ Nand $\mathrm{q})$ Nand $(\mathrm{p}$ Nand $\mathrm{q})$