BTS SIO – 1

Chapitre V

Logique - 2

Contenus

Langage ensembliste

- Ensemble, appartenance, inclusion, ensemble vide.
- Ensemble P(E) des parties d'un ensemble E.
- Complémentaire d'une partie, intersection et réunion de deux parties.
- Ensemble des éléments x d'un ensemble E satisfaisant à une proposition p(x).

Calcul Booléen

- Algèbre de Boole :
    - définition ;
    - propriétés des opérations, lois de Morgan.

Capacités

- Traiter un exemple simple de calcul portant sur des ensembles finis.
- Mener des calculs portant sur des variables booléennes.
- Simplifier une expression booléenne en utilisant :
    - un tableau de Karnaugh ;
    - les règles de calcul booléen.
- Passer d'une situation donnée à une expression booléenne correspondante et inversement.

Table des matières

I. Théorie des ensembles

I.1. Généralités

Un ensemble peuvent être définie en **extension** (on donne alors la liste de ces éléments) ou en **compréhension** (on donne alors une propriété caractéristique de ces éléments, formuler en français ou mathématiquement).

Exemples :

- Certains ensembles portent des noms qui leur sont réservés : l'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres réels est $\mathbb{R}$. L'ensemble vide se note $\emptyset$ ou $\{\}$.
- Soit $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15\}$. A est définie en **extension**. Pour dire que 12 est un élément de A, on note : $12 \in A$. Par contre $13 \notin A$.
  On peut aussi dire que 1 est l'ensemble des multiples de 3 inférieurs à 16, ou, en formulation mathématique : $A = \{3K, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 5\}$. Ici, on a défini l'ensemble A en **compréhension**.
- L'ensemble des entiers naturels de 1 à 5 : $[\![1\,;5]\!] = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Si un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on appelle cardinal de E le nombre d'élément de E. On note ce nombre $card(E)$.

Dans notre exemple, on a $card(A) = 6$.
On a $card(\emptyset) = 0$.

I.2. Sous-ensembles et complémentaires

Définition :
Un ensemble A est inclus dans E si tout élément de A est élément de E.

$$\forall\, x, \qquad x \in A \Longrightarrow x \in E$$

On note $A \subset E$. On dit que A est un sous ensemble, ou une partie de E.

$$\text{Si } (A \subset E) \wedge (E \subset A) \text{ alors on écrit } A = E.$$

Exemples :

- Soit C et D deux sous-ensembles de l'ensemble E.
  Négation de $C \subset D$: $\quad C \not\subset D \quad$ c'est-à-dire : $\quad \exists x,\ x \in C \Longrightarrow x \notin D$
- $\emptyset$ l'ensemble vide, et E sont toujours des sous ensembles de E.
- l'ensemble des caractères est inclus dans celui des chaines de caractères.
- $[\![1\,;5]\!] \subset \mathbb{N}$. ($[\![1\,;5]\!] = \{1; 2; 3; 4; 5\}$)
- Les ensembles de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{D}$ car $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a \times 10^n, n \in \mathbb{Z}$.

Définition :

Soit A un sous-ensemble de E. Alors le complémentaire de A dans E est le sous-ensemble de E formé des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Notation : $\overline{A}$ *ou* $\complement_E A$

$x \in \overline{A}$ *signifie* $(x \in E) \wedge (x \notin A)$.

Exemples :

- le complémentaire du vide : E, le complémentaire de E dans E : l'ensemble vide !
- le complémentaire de $\{V\}$ dans $\{V;F\}$ est $\{F\}$.
- description du complémentaire de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}^{-*}$ =ensemble des entiers strictement négatifs

I.3. Réunion et intersection

Définitions :

Soit A et B deux sous ensembles d'un ensemble E.

- Alors $A \cup B = (x \in E \text{ tel que } (x \in A) \vee (x \in B))$

C'est un sous ensemble de E qui s'appelle l'**union**, ou la **réunion** de A et de B.
L'élément x doit être dans **au moins un** des deux sous-ensembles.

- Alors $A \cap B = (x \in E \text{ tel que } (x \in A) \wedge (x \in B))$

C'est un sous ensemble de E qui s'appelle **l'intersection** de A et de B
L'élément x doit être dans **les deux** sous-ensembles **en même temps.**

Exemples :

$A = \{0;\ 3;\ 6;\ 9; 12; 15\}$, $B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$

$A \cap B = \{0; 12\}$ et $A \cup B = \{0; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16\}$

Quelques propriétés :

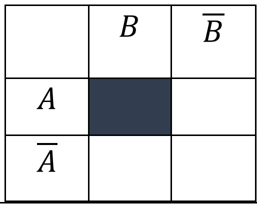
$A \cup A = A$	$A \cup E = E$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup \overline{A} = E$
$A \cap A = A$	$A \cap E = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$

Exemples : Dans $\mathbb{R}$:

$\overline{[1; 9{,}3[} =]-\infty\,; 1[\cup [9{,}3\,;\ +\infty\,[$	$[1; 4] \cup [2; 5] = [1\,; 5]$
$[1; 4] \cap [2; 5] = [2\,; 4]$	$]-3; 2{,}8[\cap \mathbb{Z} = \{-2\,;\ -1\,; 0\,; 1\,; 2\}$

<u>Diagramme de Carroll</u> de $A \cap B$; $A \cap \overline{B}$; A ; $A \cup B$

$A \cap B$



$A \cap \overline{B}$

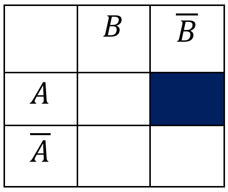


Diagramme de Carroll de A :

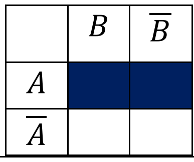
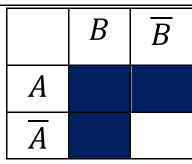


Diagramme de $A \cup B$*:*



$\forall A, B$ sous-ensembles de E: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

<u>Quelques propriétés :</u>

Lois de Morgan : $\forall A, B$ sous ensembles de E,
alors $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exemple : dans un jeu de lettres, il y a des consonnes et des voyelles, de couleur rouge ou bleu. On note VB l'ensemble des voyelles bleues. Alors $\overline{\text{VB}}$ est l'ensemble des lettres qui sont soit des consonnes, soit rouges (soit éventuellement les deux).

$\forall A, B, C$ sous-ensembles *de* E

Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	*Associativité :* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

Diagramme de $A \cap B \cap C$:

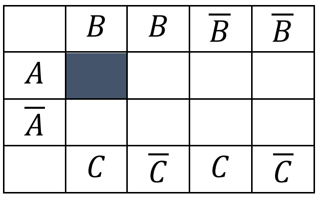


Diagramme de $A \cup B$:

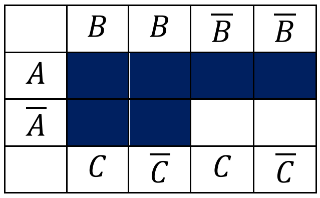


Diagramme de $B \cap C$*:*

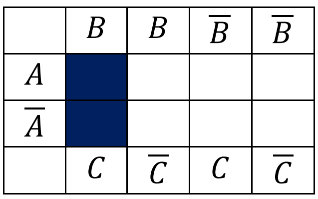


Diagramme de $A \cup C$:

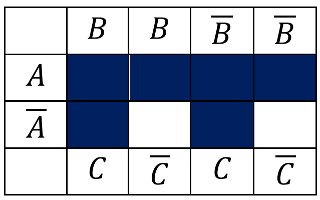


Diagramme de $A \cup (B \cap C)$:

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A				
$\overline{A}$				
	C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$

Diagramme de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$:

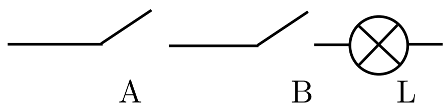
	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A				
$\overline{A}$				
	C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$

II. Algèbre booléenne

II.1. Exemple introductif

II.1.a. Premier montage

On considère la portion de circuit électrique suivante :



A et B sont 2 interrupteurs, et L une lampe.
On crée 3 variables numériques a, b et l ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 en décidant que :

- $a = 0$ si l'interrupteur A est ouvert (le courant ne passe pas) et $a = 1$ si A est fermé ;
- $b = 0$ si B est ouvert et $b = 1$ si B est fermé ;
- $l = 0$ si la lampe L est éteinte, $l = 1$ si L est allumée.

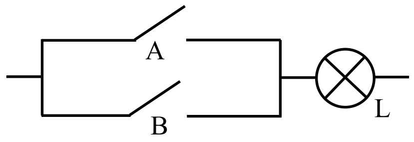
Pour ce montage, on a le tableau suivant :

a	b	l
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On voit que $l = 1$ seulement lorsque a *ET* b valent 1.

II.1.b. Deuxième montage

On considère désormais le montage suivant :



Pour ce tableau, on a le tableau suivant :
$l = 1$ seulement lorsque a OU b valent 1.

a	b	l
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

II.1.c. Bilan

Dans ces deux cas, on a défini des variables ne prenant que deux valeurs : 0 et 1. On dit que ce sont des **variables Booléennes**.
Dans le premier montage, elle est le produit des variables a et b, ce qu'on écrit $l = a.b$ ou plus simplement $l = ab$.
Dans le deuxième montage, elle est la somme des variables a et b, ce que l'on écrit $l = a + b$.

II.2. Calcul booléen

Considérons :

- Un ensemble dont les éléments sont des variables (souvent noté a, b, c,…) ne pouvant prendre que deux valeurs : 0 et 1 ;
- Et trois opérations appeler **addition**, **multiplication** et **complémentation** définies dans les tableaux ci-dessous :

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

On dit que l'ensemble de ses variables, muni de ces trois opérations, a une structure **d'algèbre de Boole**. Les variables sont appelées variables Booléennes.
Un lien évident avec la logique montre que l'addition correspond à OU, la multiplication à ET et la complémentation à NON.

Définition :

On appelle une **ALGEBRE BOOLEENNE**, un ensemble E muni de deux lois + et • (une loi additive et une loi multiplicative) qui vérifient les propriétés suivantes :

- Commutativité : $\forall a \in E, \forall b \in E :$ $a + b = b + a$ et $a \bullet b = b \bullet a$
- La loi + admet un élément neutre noté 0 qui vérifie : $\forall a \in E:$ $a + 0 = 0 + a = a$
- La loi • admet un élément neutre (l'élément unité), noté 1 qui vérifie :

$$\forall a \in E: \; a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$$

- Associativité : $\forall a \in E$, $\forall b \in E$, $\forall c \in E$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad et \qquad a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

- Distributivité : $\forall a \in E$, $\forall b \in E$, $\forall c \in E$: (développer/factoriser)

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

$$a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$$

- $\forall a \in E, \exists \, \overline{a} \in E$ qui vérifie : $a + \overline{a} = 1 \quad et \; a \bullet \overline{a} = 0$

L'élément $\overline{a}$ s'appelle l'élément complémentaire ou contraire de $\boldsymbol{a}$. Il est en fait unique (il y en a un seul). On a donc $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$

Démonstration de l'élément neutre :
Montrons que 0 est l'élément neutre de l'addition :

- *Si* $a = 0$, *alors* $a + 0 = 0 + 0 = 0$ *et* $0 + a = 0 + 0 = 0$. *Le résultat est égal à la valeur de* a.
- *Si* $a = 1$, *alors* $a + 0 = 1 + 0 = 1$ *et* $0 + a = 0 + 1 = 1$. *Le résultat est égal à la valeur de* a.

Donc, quel que soit a, *on a bien* $0 + a = a + 0 = a$.

Remarques :

- Dans une expression, la complémentation est prioritaire sur la multiplication, qui elle-même est prioritaire sur l'addition.
  Ainsi, si l'on doit calculer $a + b\bar{c}$ pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$, on commence par calculer $\bar{c} = \bar{0} = 1$. Puis on calcule le produit $b\bar{c} = 1.1 = 1$ et enfin la somme $a + b\bar{c} = 0 + 1 = 1$.
- $a + a = a$ et plus généralement $a + a + \cdots + a = a$.
- $aa = a$ et plus généralement $aa \ldots a = a$.
  Ces formules montrent qu'en calcul booléen, il n'y a ni multiple ni puissance.
- 1 est absorbant pour l'addition : pour tout x de E, $1 + x = 1$.
  En effet, $1 + x = (x + \bar{x}) + x = (x + x) + \overline{x} = x + \bar{x} = 1$
- 0 est absorbant pour la multiplication : pour tout x de E, $0 \,.\, x = 0$.
  En effet, $0 \,.\, x = (x \,.\, \bar{x}) * x = (x \,.\, x).\bar{x} = x \,.\, \overline{x} = 0$.

- L'ensemble des propositions est une algèbre booléenne :

loi +	**loi •**	**Complémentaire**	**Elément nul**	**Elément unité**
$\vee$	$\wedge$	*non( ) ou !*	$0 = FAUX$	1=VRAI

- L'ensemble des parties d'un ensemble E est une algèbre booléenne :

loi +	**loi •**	**Complémentaire**	**Élément nul**	**Élément unité**
$\cup$	$\cap$	$\bar{\square}$	$\emptyset$	E

On peut représenter une fonction booléenne par une table de vérité :
Exemple : la fonction **XOR** (**OU exclusif**):
On note $p \; XOR \; q$ au lieu de XOR(p,q)…

p	q	$p \; XOR \; q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

<u>Résultat :</u> on peut exprimer toute fonction booléenne à l'aide des opérateurs + et $\bullet$ et de la négation, comme somme de produits (on parle de <u>forme disjonctive</u>).

Méthode : on repère tous les 1 dans la colonne de droite, on exprime chacun comme produit de variables booléennes. On ajoute les produits obtenus.

Ligne 2 : $p = 0 \;\; et \;\; q = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \overline{p} = 1 \; et \; q = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \overline{p} \bullet q = 1$
Ligne 3 : $p = 1 \;\; et \;\; q = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; p = 1 \; et \; \overline{q} = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; p \bullet \overline{q} = 1$
Bilan : $p \, XOR \, q = 1$ si $p = 0 \, et \, q = 1$ ou si $p = 1 \, et \, q = 0$
donc $p \, XOR \, q = \overline{p} \bullet q + p \bullet \overline{q}$

Exemple concret :

Un immeuble de 30 étages ne comporte qu'un seul ascenseur A. Pour limiter le temps d'attente au rez-de-chaussée, on décide de mettre un deuxième ascenseur B en service avec un logiciel qui le fera descendre au rez-de-chaussée sous certaines conditions : si l'ascenseur A est à un étage supérieur au $15^{\text{ième}}$ **et** qu'il est appelé, **ou** s'il est à un étage inférieur ou égal au $15^{\text{ième}}$ **mais** qu'il monte, **ou** si l'ascenseur monte **et** qu'il n'est pas appelé, **ou** s'il ne monte pas **et** qu'il n'est pas appelé **mais** qu'il est à un étage supérieur au $15^{\text{ième}}$.

On considère les quatre variables booléennes suivantes s, m et r ainsi définies :

$s = 1$: « si l'ascenseur A est à un étage supérieur au $15^{\text{ième}}$ étage » ; $s = 0$ sinon;
$m = 1$: « si l'ascenseur A monte » ; $m = 0$ sinon;
$r = 1$: « si l'ascenseur A est appelé » ; $r = 0$ sinon ;
F = 1 : « si le deuxième ascenseur B est appelé » ; F = 0 sinon.

Traduction :

- si l'ascenseur A est à un étage supérieur au 15ième et qu'il est appelé : $s \bullet r$
- s'il est à un étage inférieur ou égal au 15ième mais qu'il monte : $\overline{s} \bullet m$
- si l'ascenseur monte et qu'il n'est pas appelé : $m \bullet \overline{r}$
- s'il ne monte pas et qu'il n'est pas appelé mais qu'il est à un étage supérieur au 15ième : $\overline{m} \bullet \overline{r} \bullet s$

Bilan : Expression de F <u>en fonction</u> de s, m et r : $F = s \bullet r + \overline{s} \bullet m + m \bullet \overline{r} + \overline{m} \bullet \overline{r} \bullet s$

<u>Propriétés de calcul des algèbres booléennes :</u>

Idempotence	$A + A = A$	$A \bullet A = A$
Élément absorbant	$A + 1 = 1$	$A \bullet 0 = 0$
Propriété de l'absorption	$A + (A \bullet B) = A$	$A \bullet (A + B) = A$
Propriétés de MORGAN	$\overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \bullet \overline{\boldsymbol{B}}$ ***(le NOR)***	$\overline{\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$ ***(le NAND)***

Simplification de $F = sr + \bar{s}m + m\bar{r} + s\,\bar{m}\,\bar{r}$

$$F = s\,r\,m + s\,r\,\bar{m} + \bar{s}\,m + m\,\bar{r} + s\,\bar{m}\,\bar{r}$$
$$F = m\,\bar{s} + m\,\bar{r} + s\,r\,m + s\,r\,\bar{m} + s\,\bar{m}\,\bar{r}$$
$$F = m(\bar{s} + \bar{r}) + m\,s\,r + s\,\bar{m}\,r + s\,\bar{m}\,\bar{r}$$
$$F = m(\overline{sr}) + m\,s\,r + s\,\bar{m}\,r + s\,\bar{m}\,\bar{r}$$
$$F = m(\overline{sr} + sr) + s\bar{m}(r + \bar{r})$$
$$F = m \bullet 1 + s\bar{m} \bullet 1$$
$$F = m + s\,\bar{m}$$
$$F = (m + s) \bullet (m + \bar{m})$$
$$F = (m + s) \bullet 1$$
$$F = m + s$$

$$\begin{aligned} &(m + s) \bullet (m + \bar{m}) \\ &= m \bullet m + m \bullet \bar{m} + s \bullet m + s \bullet \bar{m} \\ &= m \bullet \left(\underbrace{m + \bar{m}} + s\right) + s \bullet \bar{m} \\ &= m \bullet (\underbrace{1 + s}) + s \bullet \bar{m} \\ &= m \bullet 1 + s \bullet \bar{m} \\ &= m + s \bullet \bar{m} \end{aligned}$$

Conclusion: On appelle le second ascenseur si le premier monte ou s'il est à un étage supérieur au quinzième étage.

On verra avec les tableaux comment trouver cela beaucoup plus rapidement !!!

III. Tableaux de Karnaugh

Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter facilement des expressions Booléennes. Dans le cadre du programme, on se limitera à deux ou trois variables.

III.1. Cas de 2 variables

Le tableau de Karnaugh comprend 4 cases, correspondant aux 4 produits ab, $a\bar{b}$, $\bar{a}b$ et $\bar{a}\bar{b}$.

ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

	b	$\bar{b}$
a		
$\bar{a}$		

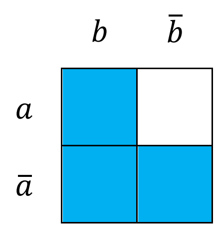
La première ligne correspond à $ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) = a.1 = a$, la seconde ligne correspond à $\bar{a}$.

De même la première colonne est b et la seconde est $\bar{b}$.

Pour représenter des expressions dans un tableau de Karnaugh, on colore les cases concernées par l'expression.

Exemple :

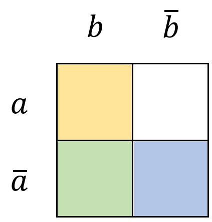
Pour représenter l'expression $\bar{a} + b$, on colore la ligne $\bar{a}$ et la colonne b :



Utilité :

On peut ainsi simplifier des expressions car à ce tableau.

Simplifions l'expression suivante : $E = b\,\bar{a} + b\,a + \bar{a}\,\bar{b}$



Ainsi, on voit que $E = \bar{a} + b$ et aussi que $non(E) = \bar{E} = a\bar{b}$

III.2. Cas de 3 variables

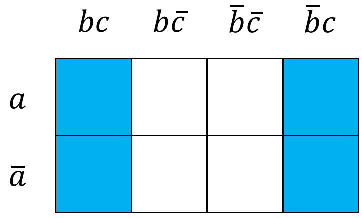
Le tableau de Karnaugh comprend alors 8 cases, correspondant aux 8 produits : $abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$

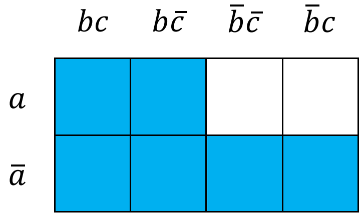
	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

Exemples :

Pour représenter l'expression c, on colorie les colonnes où l'on retrouve c :



Pour l'expression $\bar{a} + b$, on réunit la ligne $\bar{a}$ et les colonnes b (Rappel : + équivaut à une réunion).



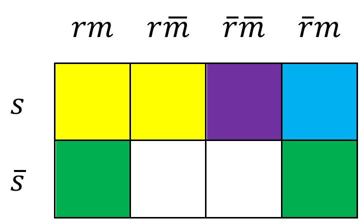
Utilité :

L'exemple de l'ascenseur :

On avait : *Expression de F <u>en fonction</u> de* s, m *et* r : $F = s \bullet r + \bar{s} \bullet m + m \bullet \bar{r} + \bar{m} \bullet \bar{r} \bullet s$

Avec un tableau de Karnaugh :

On trouve que $F = s + m$ grâce au tableau… beaucoup plus simple ;)



TD

Exercice 0 :

a. Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$, mais $B \neq C$.

b. Mêmes questions en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

c. À l'aide de diagrammes, montrer les identités suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d. Soient A et B deux parties d'un même ensemble E.

À l'aide de diagrammes, simplifier : $(A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup E)$.

d. Soit A, B et C trois ensembles, on suppose que $A \subset B$, $B \subset C$ et $C \subset A$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 1 :

Pour les valeurs de a, b et c données, calculer les expressions de A, B et C :

$$A = \bar{a} + b + \bar{c}, \quad B = a\bar{b} + c, \quad C = (a+b)\bar{c}$$

a. $a = 0, b = 1, c = 1$

b. $a = 1, b = 1, c = 1$

c. $a = 1, b = 1, c = 0$

Exercice 2 :

Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a. $a + ab = a$ b. $a(a + b) = a$

Exercice 3 :

Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a. $a + \bar{a}b = a + b$ b. $(a + b)(a + \bar{b}) = a$

Exercice 4 :

Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a. $a(b + c) = ab + ac$ (distributivité de la multiplication)

b. $a + bc = (a + b)(a + c)$ (distributivité de l'addition)

Exercice 5 :

Démontrer par le calcul les formules suivantes :

a. $a + ab = a$ b. $a(a + b) = a$

Exercice 6 :

Démontrer par le calcul les formules suivantes :

a. $a + b + \bar{a}.\bar{b} = 1$ b. $(a + b)\bar{a}.\bar{b} = 0$

Exercice 7 :

a. Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :

$A = ab + \bar{c}$ et $B = \bar{a} + bc$

b. Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exercice 8 :

a. Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :
$A = a\bar{c} + \bar{b}c + abc$ et $B = \bar{a}b + \bar{b}c + a\bar{c}$

b. Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exercice 9 :

On considère la loi * définie par la table de vérité du tableau suivant :

a	b	$a*b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a. En logique, quel est l'équivalent de cette table ?
b. À l'aide d'une table de vérité, montrer que $a * b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$.
c. Démontrer par le calcul que $a * b = (a + b).(\bar{a} + \bar{b})$.

Exercice 10 :

Soit $A = \bar{a}.\bar{b} + a.\bar{b} + b$. Montrer que $A = 1$ de deux façons : table de vérité et calculs.

Exercice 11 :

On désigne par ↓ la loi définie par $a \downarrow b = \overline{a + b}$ où a et b sont 2 variables booléennes.
a. Que valent $a \downarrow 0$ et $a \downarrow 1$.
b. Soit $A = (a \downarrow b) + (a \downarrow a)$. Simplifier A par le calcul.
c. Soient a,b et c 3 variables booléennes. A-t-on $(a \downarrow b) \downarrow c = a \downarrow (b \downarrow c)$?

Exercice 12 :

Dans un grand magasin, le service clientèle a organisé une classification des clients en trois catégories :
Si le client achète un article, il est classé en catégorie A est *a=1*, sinon *a=0*.
Si le client échange ou rend un article, il est classé en catégorie E et *e=1* sinon *e=0*.
Si le client demande des renseignements, il est classé en catégorie R et *r=1* sinon *r=0*.
Soit $F = a.\bar{e}.r + a.\bar{e}.\bar{r}$
a. Faire le diagramme de Karnaugh de F.
b. En déduire une forme simplifiée de F.

c. Retrouver la forme simplifiée de F par le calcul.
d. Quel type de client est $\bar{F}$? Est-ce un client peu intéressant, assez intéressant ou très intéressant pour le magasin ? Donner l'écriture la plus simple de $\bar{F}$.

Exercice 13 :
Une société désire recruter en interne des collaborateurs pour sa filiale en Asie. Pour chaque société, on définit les variables booléennes suivantes :

- $a=1$ s'il y a plus de cinq ans d'ancienneté dans l'entreprise.
- $b=1$ s'il possède un BTS SIO.
- $c=1$ s'il parle couramment l'anglais.

La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés :

- Qui satisfont aux trois conditions ;
- Ou qui ont moins de cinq ans d'expérience mais qui maîtrise l'anglais.
- Ou qui ne maîtrise pas l'anglais mais qui a un BTS SIO.

a. Écrire une expression booléenne E traduisant les critères de sélection de la direction.
b. Représenter l'expression E dans un tableau de Karnaugh.
c. À l'aide du tableau, donner une expression simplifiée de E.
d. Retrouver le résultat par calcul.
e. Déduire des questions 3 et 4 une version simplifiée des critères de sélection de la direction.

Exercice 14 :
On considère l'expression $E = \bar{a}\bar{c} + b\bar{c} + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c$.
a. Simplifier l'écriture $\bar{E}$ à l'aide d'un tableau de Karnaugh et en déduire que $E = \bar{b} + \bar{c}$. Retrouver par le calcul la forme simplifiée de E.
b. Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à retrouver un emploi, on considère pour ces personnes et trois variables booléennes a, b et c définit ainsi :

- $a=1$ si la personne a 45 ans ou plus, sinon $a=0$.
- $b=1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus, sinon $b=0$.
- $c=1$ si la personne a déjà suivi une qualification l'année précédente, sinon $c=0$.

Une formation sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

- Avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins d'un an.
- Avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins d'un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.
1. Écrire l'expression booléenne F en fonction de a, b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre la formation.
2. En déduire les personnes qui ne pourront pas participer à cette formation et qui donc participeront à un stage d'insertion en entreprise.

Exercice 15 :

Le gérant d'un magasin de vente de matériel d'occasion décide de réaliser une enquête sur les critères de choix des clients concernant l'achat d'ordinateurs.
Il examine trois critères, associé à trois variables booléennes a, b et c.

- La variable a concerne l'ancienneté. $a=0$ si l'ordinateur à moins d'un an, $a=1$ s'il a plus d'un an.
- La variable b concerne l'état. $b=0$ si l'ordinateur est un peu abîmé, $b=1$ s'il est en bon état.
- La variable c concerne la fiabilité. $c=0$ si la marque est réputée peu fiable, $c=1$ sinon.

Après dépouillement, il apparaît que les clients achètent un ordinateur si :

- Il a moins d'un an et que sa marque est réputé fiable ;
- Ou si il a plus d'un an mais qu'il est en bon état ;
- Ou si sa marque est réputée peu fiable mais qu'il a moins d'un an.

1. Traduire par une variable boolienne E l'ensemble des critères d'achat.
2. Faire le tableau de Karnaugh de E et donner une expression simplifiée de E. Traduire par une phrase cette expression simplifiée.
3. Montrer par calcul, que $E = \bar{a} + b$. En déduire une expression de $\bar{E}$ et traduire cette expression par une phrase.

Exercice 16 :

La connexion à un site Internet nécessite la saisie d'un mot de passe comportant de 8 à 12 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet français ou des chiffres, ou des caractères spéciaux (tels que &, *, /, § etc).
Un mot de passe est valide si l'une au moins des trois conditions suivantes est réalisé :

- Il comporte au moins trois chiffres et trois caractères spéciaux.
- Il comporte au moins cinq lettres.
- Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux.

Partie A - Reconnaître si un mot de passe est valide

1. Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H32EXZ&K5 LUC230598** 123(M*K<4

2. Paola veut créer un mot de passe avec 4 lettres, 4 chiffres et 4 caractères spéciaux. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de 8 lettres ?

Partie B – Écriture d'une expression booléenne

On définit 3 variables booléennes a, b et c de la façon suivante :

- $a=1$ si le mot de passe contient au moins 3 chiffres, sinon $a=0$.
- $b=1$ si le mot de passe contient au moins 5 lettres, sinon $b=0$.
- $c=1$ si le mot de passe contient au moins 3 caractères spéciaux, sinon $c=0$.

  Ainsi que la variable A telle que $A=1$ si le mot de passe est valide, $A=0$ sinon.

1. Traduire chacune des 3 conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a, b et c. En déduire l'expression de A.
2. Représenter A avec un tableau de Karnaugh. En déduire une expression simplifiée de A.
3. Par calculs, retrouver la forme simplifiée de A.
4. Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit valide.

Partie C – Les mots de passe non valides

1. En utilisant le tableau de Karnaugh, déterminer l'expression de $\bar{A}$.
2. Retrouver le résultat par calculs.
3. Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit refusé.