

## Chapitre VI

### Calcul Matriciel – Généralités et calcul de base

#### Contenus

- Égalité de deux matrices.
- Matrice nulle, matrice identité.
- Calcul matriciel élémentaire :
  - addition ;
  - multiplication par un nombre réel ;
  - multiplication.

#### Capacités

- Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, y compris le calcul d'une puissance d'une matrice.
- Représenter puis traiter une situation simple à l'aide d'une écriture matricielle.

#### Table des matières

<b><i>I. Généralités</i></b> .....	<b>2</b>
<b><i>II. Calcul matriciel élémentaire</i></b> .....	<b>2</b>
<b>II.1. Somme</b> .....	<b>2</b>
<b>II.2. Produit</b> .....	<b>3</b>
<b>II.3. Exercice d'application :</b> .....	<b>4</b>
<b><i>TD</i></b> .....	<b>5</b>

## I. Généralités

Une matrice  $A$ , à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, est un tableau de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où  $a_{i,j}$  désigne le nombre de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne. On peut noter plus simplement  $A = (a_{i,j})$ .

- Si  $n=p$ , on parle de matrice carrée d'ordre  $n$ .
- Si  $n=1$ , on parle de matrice ligne.
- Si  $p=1$ , on parle de matrice colonne.

### Exemple :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad B = (7 \quad 3 \quad 1) \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A$  est une matrice carrée d'ordre 3. Si on note  $A = (a_{i,j})$ , alors  $a_{2,1} = 4, a_{1,2} = 6$ .

$B$  est une matrice ligne et  $C$  une matrice colonne.

Pour que 2 matrices  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  soient égales elles doivent être de même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et avoir les mêmes éléments (i.e., pour tous  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ ).

On appelle **matrice nulle** toute matrice dont les éléments sont **tous** nuls.

On appelle **matrice identité** d'ordre  $n$ , la matrice carrée d'ordre  $n$ , notée  $I_n$  et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## II. Calcul matriciel élémentaire

### II.1. Somme

Soient  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ , deux matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. La somme des matrices  $A$  et  $B$  est la matrice  $C = (c_{i,j})$ , à  $n$  lignes et  $p$  colonnes telle que pour tous  $i$  et  $j$ , on ait :  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ .

On peut noter :  $C = A + B$ .

### Exemple :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+2 & 4-4 \\ 5-2 & 6+3 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

### Propriété :

Si  $A$  est une matrice et  $O$  une matrice nulle de même taille, alors :  $A + O = O + A = A$  ( on dit qu'une matrice nulle est élément neutre pour l'addition matricielle).

Pour toutes matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  de même taille, on a :

$A + B = B + A$  (commutativité) et  $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$  (associativité).

### Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

## II.2. Produit

Le produit d'une matrice  $A = (a_{i,j})$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes par un nombre réel  $k$  est la matrice  $B = (b_{i,j})$  à deux matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes telle que pour tous  $i$  et  $j$  on ait  $b_{i,j} = k \times a_{i,j}$ .

On note  $B = kA$ .

La matrice  $-1A$  se note  $-A$  et est appelée matrice opposée de  $A$ .

### Exemple :

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$  et  $k = 2$ ,

alors  $kA = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-2) & 2 \times 4 \\ 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 10 & 12 & -2 \end{pmatrix}$ .

Soient  $A = (a_{i,j})$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et  $B = (b_{i,j})$ , une matrice à  $p$  lignes et  $m$  colonnes. Le produit des matrices  $A$  et  $B$  est la matrice  $C = (c_{i,j})$ , à  $n$  lignes et  $m$  colonnes telle que pour tous  $i$  et  $j$ , on ait :  $c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,p} \times b_{p,j}$ .

On peut noter :  $C = A \times B = AB$ .

### Attention !!!

Pour pouvoir effectuer le produit de 2 matrices, il faut que le nombre de colonnes de  $A$  soit égal au nombre de lignes de  $B$ .

### Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 0 \times 2 & 2 \times 3 + 0 \times 4 \\ 5 \times 6 + 3 \times 2 & 5 \times 3 + 3 \times 4 \\ 1 \times 6 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 36 & 27 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, A \times B =$$

Propriétés :

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont deux matrices et  $k$  un nombre réel, on a les propriétés suivantes :

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  que l'on peut noter  $A \times B \times C$ .

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ .

$A \times (kB) = kA \times B$ .

Si  $A$  est une matrice carrée, on note  $A^2, A^3, \dots, A^n$  pour  $n \geq 2$ , les matrices définies par  $A^2 = A \times A$ ,  $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$ , ...

**Exemple :**

Si  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  alors  $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$ .

### II.3. Exercice d'application :

Une société informatique, ArthurInfo, possède deux magasins dont l'aménagement du parc informatique est le suivant :

- Magasin 1 : 12 PC, 5 tablettes, 10 mobiles.
- Magasin 2 : 17 PC, 6 tablettes, 14 mobiles.

On peut associer à cet équipement la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 17 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

La société ArthurInfo souhaite améliorer son équipement de la façon suivante :

- Magasin 1 : +3 PC, +2 tablettes, +2 mobiles.
- Magasin 2 : +5 PC, +3 tablettes, +4 mobiles.

Ce nouvel équipement peut être associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Quelle opération matricielle faut-il effectuer pour déterminer le nouvel aménagement du parc informatique des 2 magasins ?

Effectuer cette opération.

2. Pour acheter le nouvel équipement, la société ArthurInfo a le choix entre 2 fournisseurs dont les prix sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Fournisseur 1	Fournisseur 2
PC	600,00€	550,00€
Tablette	180,00€	200,00€
Mobile	60,00€	50,00€

On peut associer ces prix à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 600 & 550 \\ 180 & 200 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$$

Quelle opération matricielle faut-il effectuer pour déterminer le prix de l'aménagement du nouvel équipement selon le magasin et le fournisseur ?

Effectuer cette opération.

**Exercice 1 :**

On considère les matrices  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ , carrées d'ordre 3, définies par  $a_{i,j} = i$  et  $b_{i,j} = i - j$ .

Écrire ces matrices sous formes de tableaux de nombres.

**Exercice 2 :**

On considère la matrices  $A = (a_{i,j})$  à 3 lignes et 4 colonnes telle que  $a_{i,j} = \text{Max}(i,j)$  et la matrice B à 2 lignes et 5 colonnes telle que  $b_{i,j} = i \times j$ .

Écrire ces matrices sous formes de tableaux de nombres.

**Exercice 3 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A + B$  et  $A - B$ .
- Calculer  $(A + B) + (A - B)$ . Expliquer le résultat.

**Exercice 4 :**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A + A$ ,  $3A$  et  $-10A$ .
- Est-il possible de trouver un réel  $k$  tel que  $kA = I_2$  ? (Justifier)

**Exercice 5 :**

Soit  $A$  la matrice définie par  $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 8 & 100 \end{pmatrix}$ . Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $n$ , tel que tous les éléments de  $\frac{1}{n}A$  soient strictement inférieurs à 0,01.

**Exercice 6 :**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $2A - B$  et  $3A - 4B$ .
- Déterminer les deux matrices  $C$  et  $D$  telles que  $C + D = A$  et  $C - D = B$ .

**Exercice 7 :**

Un groupe pharmaceutique produit 3 types de médicaments M1, M2 et M3 dans chacun de ses 2 laboratoires L1 et L2. On associe la matrice A suivante à la production mensuelle (en millier) de ces médicaments dans chaque laboratoire.

$$A = \begin{pmatrix} 54 & 27 & 31 \\ 12 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le groupe produit chaque mois 12 000 médicaments du type M1 dans le laboratoire M2.

- Combien le laboratoire L1 produit-il de médicaments du type M3 par mois ?
- On peut obtenir, à partir d'une matrice colonne B, le nombre total de médicaments produits par chaque laboratoire en effectuant le calcul  $A \times B$ . De quelle matrice colonne s'agit-il ?

**Exercice 8 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A \times B$  et  $A \times (2B)$ .
- Vérifier que  $A \times (2B) = 2(A \times B)$ .

**Exercice 9 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A \times B$  et  $A \times C$ .
- Peut-on calculer  $B \times A$  et  $C \times A$ ? (Justifier)
- Calculer  $B + C$  puis  $A \times (B + C)$ .
- Calculer  $A \times (B + C) - A \times B - A \times C$ . Expliquer le résultat.

**Exercice 10 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

**Exercice 11 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

**Exercice 12 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$  et  $B \times A$  et  $A \times C \times B$ .

**Exercice 13 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .
- Calculer  $B^2$  puis  $B^3$ .

**Exercice 14 :**

Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer  $B^2$  puis  $B^3$ .
- Montrer que  $B^4 = 0$  (matrice nulle) puis que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $B^n = 0$ .

**Exercice 15 :**

Une usine fabrique 3 types de matériel électronique M1, M2 et M3 en assemblant des composants C1, C2 et C3 suivant la répartition du tableau ci-dessous :

	M1	M2	M3
<b>Nombre de composants C1</b>	2	7	3
<b>Nombre de composants C2</b>	0	2	6
<b>Nombre de composants C3</b>	3	5	2

Les masses unitaires des composants sont donnés par le tableau ci-dessous :

	C1	C2	C3
<b>Masse unitaire en g</b>	2	1	3
<b>Prix unitaire en €</b>	15	6	4

On note  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $B \times A$  et interpréter ce que représente les lignes de la matrice obtenue.
- Le directeur de l'usine souhaite fabriquer en une journée 50 matériels M1, 70 matériels M2 et 60 matériels M3.

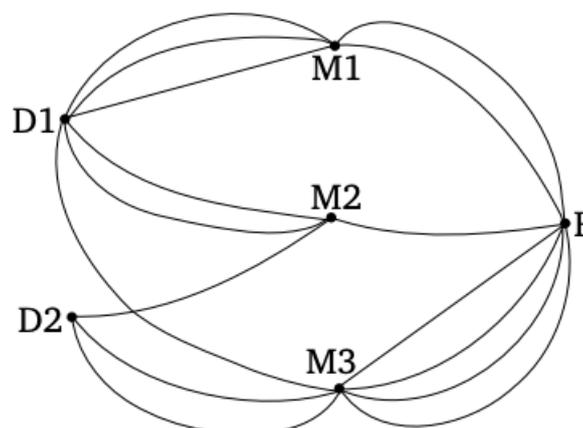
On pose  $D = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$ .

Quelle opération matricielle permet d'obtenir le nombre de composants de chaque sorte permettant de réaliser les assemblages ? Effectuer l'opération puis donner la décomposition.

**Exercice 16 :**

On représente le nombre d'itinéraires reliant entre elles six grandes villes par le schéma ci-contre. De plus on reporte dans le tableau ci-dessous le nombre d'itinéraires des villes D1 et D2 vers les villes M1, M2 et M3 :

	M1	M2	M3
<b>D1</b>	3	2	1
<b>D2</b>	0	1	2



On associe ce tableau à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- En mimant ce qui est fait pour la matrice A, donner la matrice B correspondant aux itinéraires reliant les villes M1, M2 et M3 à la ville F.

Le tableau aura cette forme :

	D1	D2
M1		
M2		
M3		

2. Compter le nombre d'itinéraires distincts reliant D1 à F. Expliquer comment obtenir ce nombre à partir des coefficients des matrices A et B.

3. Faire de même pour le nombre d'itinéraires reliant D2 à F.

**Exercice 17 : (Vers l'an prochain...)**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$  et  $B \times A$ . Que remarquez-vous ?

## Correction

### Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3 :

### Exercice 4 :

### Exercice 5 :

$$\frac{1}{n}A = \begin{pmatrix} \frac{10}{n} & \frac{20}{n} \\ \frac{8}{n} & \frac{100}{n} \end{pmatrix}$$

Le plus grand terme est  $\frac{100}{n}$ .

$$\text{On veut } \frac{100}{n} < 0,01 \Leftrightarrow 100 < 0,01n \Leftrightarrow \frac{100}{0,01} < n \Leftrightarrow 10\,000 < n.$$

### Exercice 6 :

### Exercice 7 :

Un groupe pharmaceutique produit 3 types de médicaments M1, M2 et M3 dans chacun de ses 2 laboratoires L1 et L2. On associe la matrice A suivante à la production mensuelle (en millier) de ces médicaments dans chaque laboratoire.

$$A = \begin{pmatrix} 54 & 27 & 31 \\ 12 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le groupe produit chaque mois 12 000 médicaments du type M1 dans le laboratoire M2.

- Combien le laboratoire L1 produit-il de médicaments du type M3 par mois ?
- On peut obtenir, à partir d'une matrice colonne B, le nombre total de médicaments produits par chaque laboratoire en effectuant le calcul  $A \times B$ . De quelle matrice colonne s'agit-il ?

### Exercice 8 :

$$\text{On considère les matrices } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $A \times B$  et  $A \times (2B)$ .
- Vérifier que  $A \times (2B) = 2(A \times B)$ .

### Exercice 9 :

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A \times B$  et  $A \times C$ .
- Peut-on calculer  $B \times A$  et  $C \times A$ ? (Justifier)
- Calculer  $B + C$  puis  $A \times (B + C)$ .
- Calculer  $A \times (B + C) - A \times B - A \times C$ . Expliquer le résultat.

**Exercice 10 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

**Exercice 11 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

**Exercice 12 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$  et  $B \times A$  et  $A \times C \times B$ .

**Exercice 13 :**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .
- Calculer  $B^2$  puis  $B^3$ .

**Exercice 14 :**

Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer  $B^2$  puis  $B^3$ .
- Montrer que  $B^4 = 0$  (matrice nulle) puis que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $B^n = 0$ .

**Exercice 15 :**

Une usine fabrique 3 types de matériel électronique M1, M2 et M3 en assemblant des composants C1, C2 et C3 suivant la répartition du tableau ci-dessous :

	M1	M2	M3
Nombre de composants C1	2	7	3
Nombre de composants C2	0	2	6

<b>Nombre de composants C3</b>	3	5	2
--------------------------------	---	---	---

Les masses unitaires des composants sont donnés par le tableau ci-dessous :

	<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C3</b>
<b>Masse unitaire en g</b>	2	1	3
<b>Prix unitaire en €</b>	15	6	4

On note  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A \times B$  et interpréter ce que représente les lignes de la matrice obtenue.
- Le directeur de l'usine souhaite fabriquer en une journée 50 matériels M1, 70 matériels M2 et 60 matériels M3.

On pose  $D = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$ .

Quelle opération matricielle permet d'obtenir le nombre de composants de chaque sorte permettant de réaliser les assemblages ? Effectuer l'opération puis donner la décomposition.

### **Exercice 16 : (Vers l'an prochain...)**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$  et  $B \times A$ . Que remarquez-vous ?