BTS SIO – 2

Chapitre I

Calcul Matriciel – Généralités et calcul de base

Contenus

Inverse d'une matrice

- Définition, existence éventuelle, unicité en cas d'existence.
- Commutativité d'une matrice inversible et de son inverse.

Capacités

- Montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre.
- Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'inverse d'une matrice inversible.
- Résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues à l'aide d'une inversion de matrice.

Table des matières

I. Rappel

I.1. Généralités

Une matrice A, à n lignes et p colonnes, est un tableau de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où $a_{i,j}$ désigne le nombre de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut noter plus simplement $A = (a_{i,j})$.

- Si n=p, on parle de matrice carrée d'ordre n.
- Si n=1, on parle de matrice ligne.
- Si p=1, on parle de matrice colonne.

Exemple :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre 3. Si on note A$= (a_{i,j})$, alors $a_{2,1} = 4, a_{1,2} = 6$.

B est une matrice ligne et C une matrice colonne.

Pour que 2 matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ soient égales elles doivent être de même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et avoir les mêmes éléments (i.e., pour tous i et j, $a_{i,j} = b_{i,j}$).

On appelle **matrice nulle** toute matrice dont les éléments sont **tous** nuls.

I.2. Somme de matrice

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Alors $A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+2 & 4-4 \\ 5-2 & 6+3 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

I.3. Produit de matrice

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $k = 2$,

alors $kA = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-2) & 2 \times 4 \\ 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 10 & 12 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice à *n* lignes et *p* colonnes et $B = (b_{i,j})$, une matrice à *p* lignes et *m* colonnes. Le produit des matrices A et B est la matrice $C = (c_{i,j})$, à *n* lignes et *m* colonnes telle que pour tous *i* et *j*, on ait : $c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} \times \ldots \times a_{i,p} \times b_{p,j}$.

On peut noter : $C = A \times B = AB$.

Attention !!!

Pour pouvoir effectuer le produit de 2 matrices, il faut que le nombre de colonnes de *A* soit égal au nombre de lignes de *B*.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 0 \times 2 & 2 \times 3 + 0 \times 4 \\ 5 \times 6 + 3 \times 2 & 5 \times 3 + 3 \times 4 \\ 1 \times 6 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 36 & 27 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 00 \end{pmatrix}$.

$A \times B =$

À l'aide de la calculatrice donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

II. Matrice identité et inverse

II.1. Matrice identité

On appelle **matrice identité** d'ordre n, la matrice carrée d'ordre n, notée I_n et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque :

Pour tout matrice carrée *A* d'ordre *n*, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$.

II.2. Inverse d'une matrice carrée

Rappel :

Avec les nombres réels, on a par exemple : $2 \times 0{,}5 = 0{,}5 \times 2 = 1$.

On dit que 0,5 est l'inverse de 2, ou que 2 est l'inverse de 0,5, car leur produit donne 1, qui est l'élément neutre de la multiplication.

On retrouve la même chose dans les matrices, mais le calcul est un peu plus complexe.

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Calculer :

$A \times B =$

$B \times A =$

On remarque que $A \times B = B \times A = I_2$.
On dit que B est l'inverse de la matrice A, et que A est l'inverse de la matrice B.
On note : $B = A^{-1}$.

Définition :
Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice carrée d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors on dit que la matrice A est inversible et que sa matrice inverse est B, notée A^{-1}.

À toi de jouer !

Sachant $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 1 & -0{,}6 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, que montrer que B est l'inverse de A.

III. Résolution de systèmes à l'aide de matrices

III.1. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires est constitué de plusieurs équations linéaires qui ont les mêmes inconnues.
Par exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 1 \\ 0.4x + y + 2.5z = 2 \\ -5x + 3y + 1.5z = 6.8125 \end{cases}$$

Tous les systèmes peuvent d'écrire sous la forme $AX = B$ où X et B sont des matrices colonnes, le matrice x est celui qui contient les inconnues.
Ainsi un système d'équations linéaires, c'est aussi une équation matricielle.

Exemple 1 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix}$

III.2. Résolution d'un système

Propriété :
Si un système de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$, et si A est inversible, alors ce système possède une unique solution X donnée par : $X = A^{-1} \times B$.

En effet, si $AX = B$, et si A est inversible alors :

$$AX = B$$
$$\Leftrightarrow A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1} \times A)X = A^{-1} \times B$$
$$\Leftrightarrow (I_n)X = A^{-1} \times B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$$

Utilisation :

Soit le système (S) de 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$.

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$, alors notre système peut s'écrire : $AX = B$.

Avec une calculatrice, on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Pour résoudre notre système, nous savons que :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Donc, $x = -24$ et $y = 21$. La solution du système (S) est $(-24\,;\ 21)$.

À toi de jouer !

Soit le système (S) $\begin{cases} x + 2z = 9 \\ y - 3z = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$.

1. Donner les matrices *A*, *X* et *B* telles que notre système puisse s'écrire : $AX = B$.
2. On donne $M = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}75 & -0{,}5 & 0{,}75 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times M$. Que peut-on dire de la matrice *M* par rapport à la matrice *A*.
3. Résoudre le système (S).

TD

Exercice 1 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 3{,}6 & -1{,}8 & -0{,}8 \\ 1{,}8 & -0{,}4 & -0{,}4 \end{pmatrix}$

Montrer que *B* est l'inverse de *A*.

Exercice 2 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2{,}5 \\ 2 & 3{,}5 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$ et en déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 3 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$ et en déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 4 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & -5 & -7 \\ 7 & 17 & 23 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$ et en déduire l'inverse de la matrice A.

a. Dans le produit $A \times B$, calculer, en fonction de *a*, les coefficients manquants :

$$A \times B = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 1 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. En déduire la valeur de *a* pour que la matrice B soit l'inverse de la matrice A.

Exercice 5 : *Calculer la matrice inverse d'une matrice carrée d'ordre 2*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $ad - bc \neq 0$ ($ad - bc$ est le déterminant de la matrice *A*).

a. Montrer que la matrice $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de *A*.

b. Application : Déterminer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^2 - 4A$.

b. Montrer que $A^2 - 4A = A \times (A - 4I_2)$, en déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 7 :

On donne $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^2 - 15A$.

b. Montrer que A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 8 :

On considère le système *S* d'inconnus *x*, *y* et *z* : $\begin{cases} -4x + y + 0{,}1z = -1 \\ 11x - 3y - 0{,}2z = 1 \\ -6x + 2y + 0{,}1z = 4 \end{cases}$.

a. Écrire le système sous la forme $AX = B$ en précisant les matrice *A*, *X* et *B*.

b. Avec une calculatrice, on a obtenu $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}$. Résoudre le système.

Exercice 9 :
Résoudre chaque système à l'aide des matrices :

a. $\begin{cases} x + y + z = 23 \\ 2x + 3y - z = 27 \\ -x + y + 4z = 27 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 25 \\ 2x - y - z = -7 \\ x + 3y + z = 27 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 6x + y + 3z = 5 \\ 2x + z = 0 \\ -x + 3y - z = 16 \end{cases}$

Exercice 10 :

a, *b* et *c* étant 3 réels, on considère le système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$.

1. a. Donner les matrices *A*, *X* et *B* telles que notre système puisse s'écrire : $AX = B$.
b. Exprimer *x*, *y* et *z* en fonction de *a*, *b* et *c*.

2. Utiliser les résultats de la questions 1, pour résoudre les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 25 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 18 \\ x - y + z = 9 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 27 \\ 6x + 3y + 9z = 6 \\ 3x - 3y + 3z = 15 \end{cases}$

Exercice 11 :

Dans un magasin de fournitures de bureau :
- 4 stylos, 2 gommes et 3 pochettes coûtent 10,70€.
- 1 stylo, 1 gomme et 5 pochettes coûtent 7,80€.
- 2 stylos, 1 gomme et 4 pochettes coûtent 8,10€.

a. Traduire l'énoncé par un système puis l'écrire sous à l'aide de matrices.
b. Combien coûtent un stylo ? une gomme ? une pochette ?

Exercice 12 :
Pour une fabrication, une entreprise utilise *x* pièces de type 1, *y* pièces de types 2 et *z* pièces de type 3. La masse et le coût de chaque type de pièces sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Pièce de type 1	**Pièce de type 2**	**Pièce de type 3**
Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en euros	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N de pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en euros.

1. Calculer N, M et C lorsque *x=20*, *y=30* et *z=35*.
2. Exprimer N, M et C en fonction de *x*, *y* et *z*.
3. On se propose de résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = N \\ 2{,}5x + 2y + z = M \\ x + 1{,}5y + 0{,}5z = C \end{cases}$ dont les inconnues sont *x*, *y* et *z*.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Avec la calculatrice, déterminer A^{-1}.
b. En déduire la solution du système en fonction de N, M et C.

4. L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées 140 pièces, pour une masse totale de 275g et un coût de 135€.

Dans ces conditions, calcule le nombre de pièces de chaque type qui seront utilisées pour cette fabrication.

Exercice 13 :

Le responsable d'un club informatique souhaite acheter des souris, des clés USB et des tapis de souris, les matériels de chaque type étant identiques.

- S'il achète 3 souris, 5 clés et 3 tapis, il paiera 132,10€.
- S'il achète 6 souris, 4 clés et 5 tapis, il paiera 172,90€.
- Enfin, il paiera 118,90€ pour 4 souris, 6 clés et 1 tapis.

a. Traduite les données par un système de 3 équations dont les inconnues sont le prix en euro de chaque produit.
b. Résoudre ce système à l'aide de matrice que vous identifierez clairement.
c. Combien coûte chaque type de matériel ?

Exercice 14 :
Dans un repère du plan, on considère les points $A(-3\,;\,-23)$, $B(2\,;\,12)$ et $C(4\,;\,-2)$ et on cherche s'il existe une parabole passant par ces 3 points. Pour cela, on prend $y = ax^2 + bx + c$ comme équation générale d'une parabole.
a. Montrer que A est sur la parabole si et seulement si $9a - 3b + c = -23$.
b. Traduire le fait que *B* et *C* appartiennent à la parabole.
c. Résoudre le système de 3 équations dont les inconnues sont *a*, *b* et *c*.
d. Quelle est l'équation de la parabole ?

Aide/Rappel :
Un point est sur une courbe représentative d'une fonction f, si ses coordonnées x et y vérifie l'équation : on remplace le x et le y par les coordonnées de ce point.

Exercice 15 :
On donne les matrices suivantes (*x, y, z, a, b, c* désignant des réels) :
$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -2x + 4z = a \\ 2y = b \\ -2x + 2z = x \end{cases}$
1. Justifier que résoudre ce système à trois inconnues réelles *x, y* et *z* équivaut à résoudre l'équation $AX = B$ où l'inconnue est le vecteur-colonne X.
2.a. Calculer A^2 , A^3 et A^4 .
b. Exprimer A^4 en fonction de I_3.
3.a. Montrer que $AX = B$ équivaut à $X = \frac{1}{16}A^3 \times B$.
b. En déduire la solution du système en fonction de *a, b* et *c*.
c. Donner les solutions du système lorsque *a = 8, b = 2* et *c = −12*.

Exercice 16 :
Pour permettre aux clients d'une société d'accéder à leurs factures, le service comptable attribue un code à chacun d'entre eux. Pour tout entier naturel *n*, le code attribué au client numéro *n* se calcule avec la formule $x + ny + n^2 z$, où *x, y* et z, sont trois nombres que les questions suivantes vont permettre de déterminer.

1. Sachant que le client numéro 1 a pour code le nombre 12, que le client numéro 2 a pour code le nombre 27 et que le client numéro 3 a pour code le nombre 50, écrire un système de trois équations vérifiées par les nombres *x, y* et *z*.
2. On donne les matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 27 \\ 50 \end{pmatrix}$.
Le système précédent s'écrit alors sous la forme matricielle : $M \times X = B$. Résoudre ce système revient à déterminer la matrice X, ce que proposent les questions suivantes.

a. Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel $P \times M$.

b. En déduire que si $M \times X = B$ alors $X = P \times B$.

c. Déterminer alors les nombres *x, y* et *z*.

Exercice 17 :

BTS

Dans cet exercice, on s'intéresse à un réseau social.

Les comptes du réseau social sont répartis en trois types :

• le type a regroupe les comptes ayant entre 0 et 20 000 abonnés ;

• le type b regroupe les comptes ayant entre 20 000 et 200 000 abonnés ;

• le type c regroupe les comptes ayant plus de 200 000 abonnés.

Pour fidéliser les comptes ayant le plus d'abonnés, le réseau social leur attribue une prime annuelle.

Cette prime est financée par des annonces publicitaires. Le nombre d'annonces publicitaires publiées sur la page d'un compte dépend de son type. De plus, le réseau social sponsorise chaque année les projets des comptes ayant le plus d'abonnés. Les données relatives aux différents types de comptes sont résumées dans le tableau ci-dessous :

	Type a	**Type b**	**Type c**
Prime annuelle (en euros)	0	510	1200
Nombre d'annonces publicitaires	1	2	5
Nombre de projets sponsorisés chaque année	0	1	2

En 2018, il y avait 1 928 340 comptes de type a, 1 220 comptes de type b et 246 comptes de type c. On définit les matrices ci-dessous :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 510 & 1200 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1\,928\,340 \\ 1220 \\ 246 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{180}\begin{pmatrix} -1 & 180 & 1200 \\ -2 & 0 & 1200 \\ 1 & 0 & -510 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A \times B$ puis interpréter le résultat obtenu.

2. a. Calculer le produit $A \times C$ et exprimer le résultat en fonction de la matrice identité.

b. Montrer que l'équation matricielle $A \times X = Y$ d'inconnue X a pour solution $X = C \times Y$.

3. En 2019, on suppose que le nombre de comptes est resté constant tout au long de l'année.

Cette année-là, le réseau social a distribué 1 197 600 euros de primes, publiait simultanément 2 146 820 annonces publicitaires sur l'ensemble de ses pages et a financé au total 2 200 projets.

À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre de comptes de chaque type pour l'année 2019.

Solutions :
Exercice 1 : $A \times B = I_3$

Exercice 2 : $A \times B = 3I_2 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}B = I_2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}B$ est l'inverse de A : $A^{-1} = \frac{1}{3}B$.

Exercice 3 : $A \times B = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}B = I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B$ est l'inverse de A : $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

Exercice 4 :
a. coef. manquants : $\begin{cases} 5a + 7 + 4 = 5a + 11 \\ 2a + 7 - 3 = 2a + 4 \\ -3a - 7 + 1 = -3a - 6 \end{cases}$

b. B est inverse de A ssi : $\begin{cases} 5a + 11 = 1 \\ 2a + 4 = 0 \\ -3a - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -2 \\ a = -2 \end{cases}$

Exercice 5 :
a. $A \times B = I_2$
b. $A^{-1} = \frac{1}{7\times8-3\times12} \times \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}15 \\ -0{,}6 & 0{,}35 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :
a. $A^2 - 4A = I_2$
b. $A^2 - 4A = I_2 \Leftrightarrow A \times A - 4A \times I_2 = I_2 \Leftrightarrow A \times (A - 4 \times I_2) = I_2$, donc A est inversible est $A^{-1} = A - 4 \times I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :
a. $A^2 - 15A = 4I_2$
b. $A^2 - 15A = 4I_2 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{4}(A - 15I_2) = I_2$, donc A est inversible est $A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 15I_2) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -1{,}25 \\ -1{,}5 & -3{,}25 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 :
a. simple
b. $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$

Exercice 9 :
a. *x=10, y=5, z=8*
b. *x=2, y=7, z=4*
c. *x=1, y=5, z=-2*

Exercice 10 :
1. a. simple
b. *x=2a-b+c ; y=0,5a-0,5c ; z=-1,5a+b-0,5c*.
2. (S1) : *x=9, y=1, z=2*
(S2) : *x=5, y=-1 et z=3*
(S3) : *x=21, y=2 et z=-14*.

Exercice 11 :
a. $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 10{,}70 \\ x + y + 5z = 7{,}8 \\ 2x + y + 4z = 8{,}1 \end{cases}$
b. stylo : 1,40€, gomme :0,90€ et pochette :1,10€.

Exercice 12 :

1. N=85, M=145 et C=82,5

2 .$N = x + y + z$, $M = 2{,}5x + 2Y + z$ et $C = x + 1{,}5y + 0{,}5z$.

3.a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -1 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = -0{,}5N + M - C \\ y = -0{,}25N - 0{,}5M + 1{,}5C \\ z = 1{,}75N - 0{,}5N - 0{,}5C \end{cases}$

4. *x=70*, *y=30* et *z=40*.

Exercice 13 :

a. $\begin{cases} 3x + 5y + 3z = 132{,}10 \\ 6x + 4y + 5z = 172{,}90 \\ 4x + 6y + z = 118{,}90 \end{cases}$

b. *x=6,90 ; y=12,50 et z=16,30*.

c. facile

Exercice 14 :

a. facile

b. $4a + 2b + c = 12$, $16a + 4b + c = -2$

c. $a = -2, b = 5; c = 10$

d. facile