BTS SIO – 2

Chapitre II

GRAPHES ET ORDONNANCEMENT

Contenus

Graphes

- Modes de représentation d'un graphe fini simple orienté : représentation géométrique, tableau des successeurs ou des prédécesseurs, matrice d'adjacence booléenne.
    - Passer d'un mode de représentation à un autre, pour un graphe donné.

- Chemin d'un graphe : définition, longueur, circuit, boucle, chemin hamiltonien.
- Puissances entières et booléennes de la matrice d'adjacence.
    - Obtenir et interpréter, pour une matrice d'adjacence M donnée, les coefficients :
      – d'une puissance entière de M ;
      – d'une puissance booléenne de M.
    - Mettre en œuvre un algorithme permettant d'obtenir les chemins de longueur p d'un graphe.
- Fermeture transitive d'un graphe.
    - Mettre en œuvre un algorithme permettant d'obtenir la fermeture transitive d'un graphe.
- Pour un graphe sans circuit : niveau d'un sommet, niveaux du graphe.
    - Mettre en œuvre un algorithme permettant d'obtenir les niveaux dans un graphe sans circuit.
    - Représenter géométriquement un graphe en l'ordonnant par niveaux.
- Arborescence.
- Chemin optimal en longueur.
    - Mettre en œuvre un algorithme permettant d'obtenir une optimisation d'un graphe :
      – en longueur ;
      – en valeur (graphe valué).
- Graphe valué (pondéré) :
  – définition ;
  – chemin optimal en valeur

Ordonnancement

- Ordonnancement :
  – méthode MPM ou méthode PERT, principe de représentation ;
  – dates au plus tôt, au plus tard ;
  – tâches et chemins critiques ;
  – marge totale, libre, certaine.
    - Résoudre un problème d'ordonnancement en mettant en œuvre la méthode des potentiels métra (MPM) ou la méthode PERT, et interpréter les résultats obtenus à travers les notions abordées.
    - Reconnaître une contrainte non incluse dans la modélisation et en tenir compte lors de l'interprétation

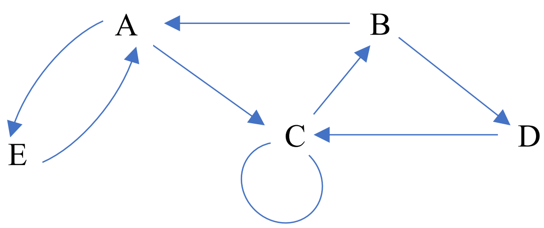
Table des matières

I. Représentation d'un graphe

Un site internet est composé de 5 pages notées A, B, C, D et E. En un clic, on peut passer d'une page à certaines autres selon les possibilités suivantes :

- De la page A, on peut passer en un clic aux pages C et E.
- De la page B, on peut passer aux pages A et D.
- Depuis la page C, on peut accéder à la page B ou rester sur C.

Quand on est sur la page D, on peut seulement aller sur la page C et de la page E, on ne peut aller que sur la page A.
On peut modéliser cette situation avec un **graphique sagittal** (voir ci-dessous), constitué de l'ensemble $S = \{A; B; C; D; E\}$ des **sommets**, et de flèches orientées appelées **arcs**.



On peut représenter chaque flèche par un couple $(X;\ Y)$ où X est le point de départ de la flèche et Y son point d'arrivée. On obtient ainsi une liste de couples, qui est une partie du produit cartésien S^2 : $(A; C)$, $(A; E)$, $(B; A)$, $(B; D)$, $(C; B)$, $(C; C)$, $(D; C)$, $(E; A)$.
On peut aussi faire un tableau donnant, pour chaque page, les pages qui peuvent être atteintes par un seul clic. On fait alors le tableau des **successeurs** (tableau de gauche). Une autre possibilité est de faire le tableau des prédécesseurs (tableau de droite), c'est-à-dire un tableau donnant, pour chaque page, les pages qui ont permis d'y arriver avec un seul clic.

Page (sommet)	Successeur
A	C, E
B	A, D
C	B, C
D	C
E	A

Page (sommet)	Prédécesseur
A	B, E
B	C
C	A, C, D
D	B
E	A

On peut aussi faire un tableau à double entrée en codant 1 s'il existe une possibilité en un seul clic, d'aller d'une page de départ (origine) à une page d'arrivée (extrémité), et en codant 0 s'il n'y a pas possibilité de passage.

		Extrémités				
		A	**B**	**C**	**D**	**E**
Origine	**A**	0	0	1	0	1
	B	1	0	0	1	0
	C	0	1	1	0	0
	D	0	0	1	0	0
	E	1	0	0	0	0

On peut ainsi associer ce tableau à la matrice carrée d'ordre 5 suivante, appelée **matrice d'adjacence**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.1. Vocabulaire des graphes

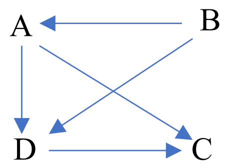
Un **graphe simple orienté** est défini par un ensemble fini $S = \{a_1;\ a_2; \dots ; a_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, et par un ensemble G de couples appartenant au produit cartésien S^2 dont les éléments sont appelés **arcs**.
Le couple $(a_i;\ a_j)$ appartient à G si et seulement si, sur le digramme sagittal, on peut relier le sommet a_i au sommet a_j par une flèche orientée.
Le sommet a_i est appelé **origine**, et le sommet a_j est appelé **extrémité**. Si l'origine et l'extrémité sont confondues, l'arc est une **boucle**.
Soit $(a_i;\ a_j)$ un arc d'un graphe G :

- Le sommet a_j est un **successeur** de a_i et a_i est un **prédécesseur** de a_j.
- L'ensemble des successeurs d'un sommet a_i se note $\Gamma^+(a_i)$.
- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet a_j se note $\Gamma^-(a_j)$.

Exemple :
Les successeurs de A sont C et E, donc $\Gamma^+(A) = \{C; E\}$.
Les prédécesseurs de A sont B et E, donc $\Gamma^-(A) = \{B; E\}$.

I.2. Matrice d'adjacence d'un graphe

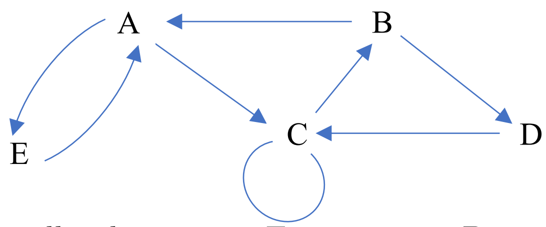
Soit G un graphe orienté ayant n sommets $a_1;\ a_2; \dots ; a_n$. La matrice d'adjacence du graphe est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre n telle que : $m_{i,j} = 1$ si et seulement si $(a_i;\ a_j)$ est un arc d'un graphe G, et $m_{i,j} = 0$ sinon.
Exemple :
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence d'un graphe définie sur $S = \{A; B; C; D\}$.
La première ligne montre que $\Gamma^+(A) = \{C; D\}$. La troisième ligne montre que C n'a pas de successeur.
On peut ainsi reconstituer le graphe :



Le nombre de 1 sur une ligne est le nombre de successeurs du sommet correspondant à la ligne. Concernant les colonnes, le nombre de 1 est le nombre de prédécesseurs du sommet qui correspond à la colonne.

II. Chemins d'un graphe

Reprenons le graphe exemple du I.



En suivant les arcs, on peut aller du sommet E au sommet B en passant par les sommets A puis C. La suite ordonnée (E, A, C, B) est un **chemin** constitué de 3 arcs. Ce chemin est de **longueur** 3. On peut remarquer que chaque arc de ce chemin peut être considéré comme un chemin de longueur 1.
(A, B, D) n'est pas un chemin car il n'y a pas d'arc qui permet de A à B.
(D, C, B, D) est un chemin dont le premier sommet est le même que le dernier sommet : c'est un **circuit**.
(E,A, C, B, D) est un chemin qui passe par tous les sommets, une fois et une seule : on dit que c'est un **chemin hamiltonien**.

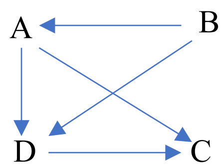
II.1. Chemin et longueur

Dans un graphe orienté, un **chemin** est une suite ordonnée de sommets dans laquelle chaque sommet, à part le premier, est un successeur du sommet qui le précède.

Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui passe une seule fois par tous les sommets du graphe. S'il y a n sommets dans un graphe, la longueur d'un chemin hamiltonien est $n-1$.

Un circuit est un chemin dans lequel le premier et dernier sommet sont identiques.

Exemple :

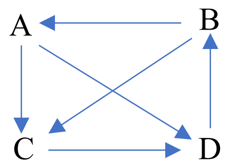


(B, D, C) et (B, A, D) sont des chemins, (A, C, D) n'en est pas un.
(A, D, C, A) est un circuit.
(B, A, D, C) est un chemin hamiltonien.

La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arcs qui constituent ce chemin.
La longueur d'un chemin à n sommets est $n-1$.

II.2. Nombre de chemins de longueur donnée

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté à n sommets $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Soient p un entier et $M^p = (m_{i,j})$ la puissance d'exposant p de la matrice M.
Alors $m_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p allant du sommet a_i au sommet a_j.



La matrice d'adjacence du graphe ci-contre est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prenons $p = 2$. Les calculs matriciels nous donnent $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons la 2ème ligne de la matrice M^2. Elle concerne le sommet B du graphe.
Les deux premiers coefficients sont 0. Cela veut dire qu'il n'y a pas de chemin de longueur 2 qui relie B à A, ou B à B.
Le 3ème coefficient est 1, donc il existe 1 chemin de longueur 2 reliant B à C : (B, A, C).
Le dernier coefficient est 2. Il y a donc 2 chemins de longueur 2 reliant B à D : (B, A, D) et (B, C, D).

Prenons $p = 3$:$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Cette matrice permet de connaître le nombre de chemins de longueur 3 qui relient un sommet à un autre.

II.3. Opérations sur les matrices booléennes

Les matrices d'adjacences ne comportant que des 0 ou des 1, on peut appliquer sur leurs coefficients l'addition et la multiplication booléennes.

Exemple :
Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'addition booléenne des 2 matrices de note $M \oplus M'$ et vaut $M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On applique les résultats d'une somme booléenne avec $1 + 1 = 1$.

On fait de même avec la multiplication booléenne, qui se note $M \otimes M$.

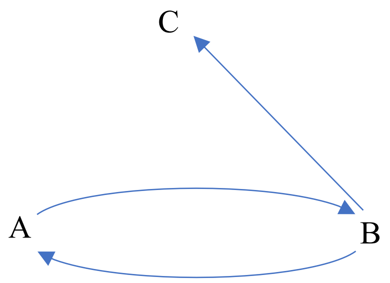
On a $M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On définit également les puissances booléennes notées $M^{[p]}$.
$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

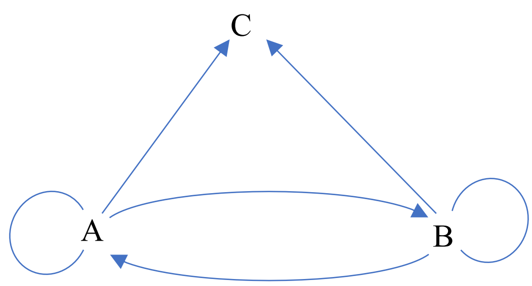
Propriété :
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté à n sommets $a_1, a_2, \dots, a_n$ et soit $M^{[p]} = (m_{i,j})$ la matrice booléenne d'exposant p.
Si $m_{i,j} \neq 0$ alors il existe **au moins un chemin** de longueur p reliant le sommet a_i au sommet a_j.

II.4. Fermeture transitive d'un graphe

Faire la fermeture transitive d'un graphe consiste à rajouter tous les arcs (a_i, a_j) dès qu'il existe un chemin allant du sommet a_i au sommet a_j.

Exemple
Sur le graphe ci-dessous (à gauche), il existe un chemin allant de A à C en passant par B donc on rajoute l'arc (A, C).
De même, il faut rajouter les boucles (A, A) et (B, B).





Fermeture transitive du graphe de gauche

Il peut être difficile de faire la fermeture transitive d'un graphe sans oublier d'arcs. Mais en utilisant la matrice d'adjacence d'un graphe, et moyennant quelques calculs matriciels, on peut déterminer la matrice d'adjacence de la fermeture transitive. Il est alors plus facile de ne pas oublier des arcs ;)

Nous admettrons la propriété suivante :

Propriété
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets et soit $\widehat{M}$ la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe. Alors $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \dots \oplus M^{[n]}$.

Exemple :
Reprenons le graphe précédent dont la matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le graphe possède 3 sommets, donc d'après la propriété précédente, la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe est Alors $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$.
$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III. Niveau des sommets d'un graphe sans circuit

Les graphes sans circuit ni boucle peuvent être ordonnés par niveaux.
La définition suivante va préciser la notion de niveau d'un sommet d'un graphe orienté sur un ensemble S de sommets.

III.1. Dessin orienté d'un graphe par niveau

On appelle **sommet de niveau 0** tout sommet qui n'a pas de prédécesseur. Si on note S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, alors on appelle **sommet de niveau 1** tout sommet dans $S - S_0$ (ensemble S privé des éléments de S_0). On définit ensuite les **sommets de niveau 2** et ainsi de suite…

Exemple :
Sur l'ensemble $S = \{A; B; C; D; E\}$, on définit un graphe par sa matrice d'adjacence M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons les sommets de niveau 0.

Sommet	A	B	C	D	E
Prédécesseurs	B	---	A, E	B	A, D

B est le seul sommet qui n'a pas de prédécesseur, il est donc le seul sommet de niveau 0.

$$S_0 = \{B\}$$

On va maintenant chercher les sommets de niveau 1 : ce sont les sommets qui n'ont pas de prédécesseurs dans $S - S_0 = \{A; C; D; E\}$

Sommet	A	C	D	E
Prédécesseurs	---	A, E	---	A, D

A et D n'ont pas de prédécesseurs dans $S - S_0$, ils sont de niveau 1.

$$S_1 = \{A, D\}$$

Les sommets de niveau 2 sont ceux qui n'ont pas de prédécesseur dans $S - S_0 - S_1 = \{C, E\}$.

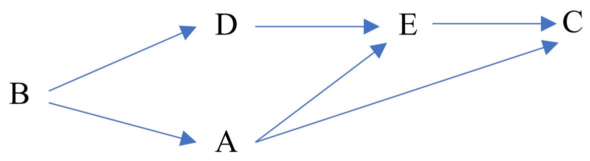
Sommet	C	E
Prédécesseurs	E	---

E est le seul sommet qui n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0 - S_1$, il est de niveau 2.

C sera de niveau 3.
Les niveaux des sommets sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Niveau	0	1	2	3
Sommets	B	A, D	E	C

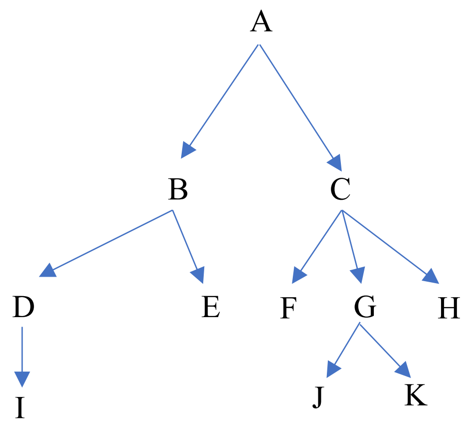
On peut faire le graphe en alignant verticalement les sommets de même niveau.



III.2 Arborescence

Une arborescence est un graphe orienté qui possède un sommet de niveau 0, appelé **racine**, à partir duquel on peut atteindre tout autre sommet par un **chemin unique**.

Exemple :



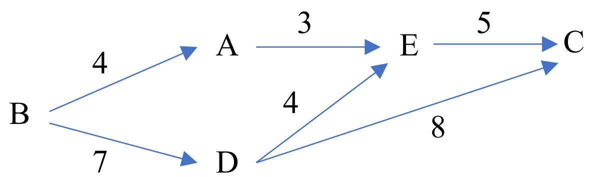
III.3. Graphe pondéré (ou valué)

Sur certains graphes orientés, il peut être nécessaire d'attribuer une valeur à chacun des arcs : on obtient alors un **graphe pondéré** ou **valué**.
La **valeur d'un chemin** est la somme des valeurs des arcs qui composent le chemin. Il est alors possible de chercher le chemin de valeur minimale ou maximale reliant un sommet à l'autre.

Exemple :
Sur le graphe pondéré ci-dessous, pour relier B à C, il y a 3 chemins possibles :

- Le chemin (B, A, E, C) de valeur $4 + 3 + 5 = 12$.
- Le chemin (B, D, E, C) de valeur $7 + 4 + 5 = 16$.
- Le chemin (B, D, C) de valeur $7 + 8 = 15$.

Le chemin minimal est (B, A, E, C), le chemin maximal et (B, D, E, C).



Un algorithme de recherche de chemin optimal sera proposé dans l'exercice 16.

IV. Méthode MPM d'ordonnancement d'un graphe

La réalisation d'un projet passe par l'exécution de différentes tâches, de durées souvent différentes. Si certaines tâches peuvent être réalisées simultanément, d'autres nécessitent que certaines tâches aient été réalisés antérieurement.

Faire **l'ordonnancement d'un projet** consiste à organiser ce projet en respectant les contraintes d'antériorité de tâches tout en minimisant la durée totale de réalisation.

La **méthode MPM** (Méthode des Potentiels Métra) permet l'ordonnancement de projets, c'est la méthode que nous exposerons dans ce cours. Nous aurions pu choisir la méthode PERT, mais elle est plus complexe à mettre en œuvre.

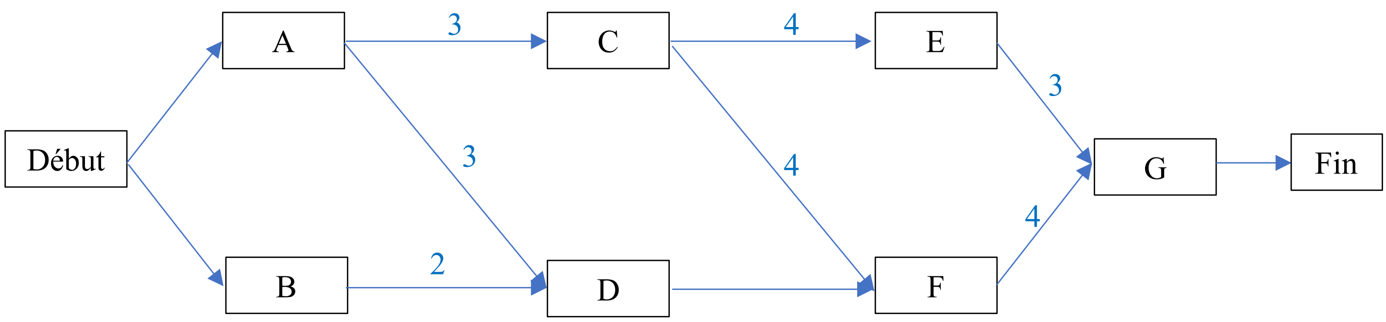
Exemple :

Pour illustrer la méthode MPM, nous allons réaliser l'ordonnancement d'un projet fictif, comprenant des tâches que nous noterons A, B, C, D, E, F, G. Les contraintes d'antériorité et les durées de ces tâches sont consignées dans le tableau suivant.

Tâche	Durée (en jours)	Tâches antérieurs
A	3	Aucune
B	2	Aucune
C	4	A
D	5	A, B
E	3	C
F	4	C, D
G	3	E, F

La première chose à faire est de définir le niveau de chaque tâche. Il est simple de voir que A et B sont de niveau 0, C et D de niveau 1, E et F de niveau 2 et enfin, G de niveau 3.

Le graphe ordonné par niveau est le suivant :



On peut remarquer que l'on a rajouté deux tâches fictives : Début et Fin, et que l'on a pondéré le graphe en ajoutant les durées de chaque tâche.

Il est plutôt simple de calculer la durée minimale du projet (on la calculera plus loin…). Mais on peut se poser quelques questions :

- À quel moment peut-on commencer une tâche ?

- Est-ce qu'on peut retarder le moment de démarrer certaines tâches sans que cela ait d'impact sur la durée minimale du projet ?

Pour répondre à ces questions, nous allons définir, pour chaque tâche, les notions de **date au plus tôt** et de **date au plus tard**.

Ces notions utilisant les durées des tâches, nous noterons $d(x_j)$ la durée d'une tâche x_j.

IV.1. Date au plus tôt – Date au plus tard

La **date au plus tôt** d'une tâche est la date minimale à laquelle on peut commencer la tâche, car toutes les tâches antérieures sont terminées.

Nous noterons $t(x_j)$ la date au plus tôt d'une tâche tâche x_j. $t(x_j)$ est le plus **grand** des nombres $t(x_i)+d(x_i)$ où x_i est une des tâches qui précède immédiatement la tâche x_j .

Exemple :

Calculons les dates au plus tôt des tâches du projet :

- t(A) = t(B) = 0
- t(C) = t(A) + d(A) = 0 + 3 = 3
- D a deux prédécesseurs : A et B. On calcule t(A) + d(A) = 0 + 3 = 3 et t(B) + d(B) = 0 + 2. t(D) est le plus grand de ces deux nombres donc t(D) = 3.
- t(E) = t(C) + d(C) = 3 + 4 = 7
- F a deux prédécesseurs : C et D. On calcule t(C) + d(C) = 3 + 4 = 7 et t(D) + d(D) = 3 + 5 = 8. Le plus grand de ces deux nombres et 8, donc t(F) = 8.
- Pour G, on calcule t(E) + d(E) = 7 + 3 = 10 et t(F) + d(F) = 8 + 4 = 12 donc t(G) = 12.
- Et pour finir t(Fin) = t(G) + d(G) = 12 + 3 = 15.

On a ainsi calculé la date au plus tôt de la fin du projet qui est de 15 jours.

La **date au plus tard** d'une tâche est la date maximale à laquelle on peut commencer la tâche sans que cela ne pousse la date de finn du projet.

Nous noterons $T(x_j)$ la date au plus tard d'une tâche tâche x_j. $T(x_j)$ est le plus **petit** des nombres $T(x_k)$-$d(x_k)$ où x_k est une des tâches qui suit immédiatement la tâche x_j .

Exemple :

Calculons les dates au plus tard des tâches du projet : on doit **commencer par la fin** puisqu'à chaque fois, on doit considérer les successeurs.

- On a bien sûr T(Fin) = t(Fin) = 15
- T(G) = T(Fin) – d(G) = 15 – 3 = 12
- T(F) = T(G) – d(F) = 12 – 4 = 8
- T(E) = T(G) – d(E) = 12 – 3 = 9
- T(D) = T(F) – d(G) = 8 – 5 = 3
- C a deux successeurs : E et F. On calcule T(E) – d(C) = 9 – 4 = 5 et T(F) – d(C) = 8 – 4 = 4. Le plus petit de ces deux nombres est 4, donc T(C) = 4.

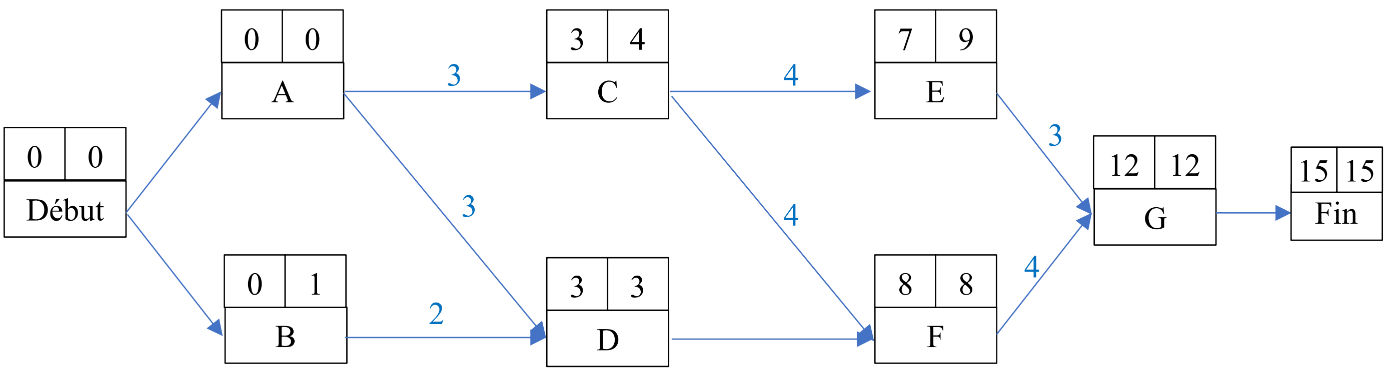
- $T(B) = T(D) - d(B) = 3 - 2 = 1$
- A a deux successeurs : C et D. On calcule $T(C) - d(A) = 4 - 3 = 1$ et $T(D) - d(A) = 3 - 3 = 0$. Donc $T(A) = 0$.

Pour chaque tâche, on va rajouter les dates au plus tôt et au plus tard en présentant chaque tâche par un rectangle :

$t(x_j)$	$T(x_j)$
x_j	

Par exemple, pour la tâche E :

7	9
E	



Examinons la tâche C : on a $t(C) = 3$ et $T(C) = 4$. Au plus tôt, on peut commencer à 3 jours et au plus tard à 4 jours. Pour cette tâche, on dispose donc d'une « liberté » d'un jour.
Ce n'est pas ainsi pour d'autres tâches (comme D par exemple) pour lesquelles les dates au plus tôt et au plus tard sont les mêmes. Ces tâches sont qualifiées de **tâches critiques**.
Et l'enchaînement A-D-F-G-Fin, qui ne contient que des tâches critiques, est qualifié de **chemin critique**.

Une **tâche critique** est une tâche dont les dates au plus tôt et au plus tard sont égales. Donc x_j est critique si et seulement si $t(x_j) = T(x_j)$.
Un **chemin critique** est un chemin reliant le début à la fin et qui n'est constitué que de tâches critiques.

IV.2. Marges d'une tâche

La marge totale d'une tâche c'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début de la tâche sans que cela ne retarde la date de fin du projet.

La marge totale d'une tâche x_j se note $MT(x_j)$ et vaut $MT(x_j) = T(x_j) - t(x_j)$.

Exemple :
La tâche C n'est pas critique. On peut constater qu'on peut retarder le début de C d'un jour sans retarder la date de fin du projet (et c'est le maximum).

En effet, si C commence à la date 4, E et F commenceront à la date 8, et cela n'empêchera pas G de commencer à la date 12.
Ce retard maximum s'appelle la **marge totale** de la tâche.

Remarque :
La marge totale d'une tâche critique est nulle.

La marge libre d'une tâche, c'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début de la tâche sans que cela ne retarde la date de début au plus tôt de chacune des tâches qui suivent immédiatement.

La marge libre d'une tâche x_j se note $ML(x_j)$. $ML(x_j)$ est le plus petit des nombres $t(x_k) - t(x_j) - d(x_j)$, où x_k est une tâche qui suit x_j.

Exemple :
Dans le graphe du projet, on a MT(B) = 1 ; MT(C) = 1 ; MT(E) = 2.
Retarder la date de début d'une tâche peut avoir des conséquences sur la date de fin d'un projet. Mais si on s'intéresse simplement aux tâche qui suivent immédiatement, on peut regarder l'impact d'un retard sur les dates au plus tôt de ces tâches.
Si on examine la tâche C, un retard d'un jour ne retarde pas la date au plus tôt de F, mais a un impact sur le date au plus tôt de E.
Donc, si on ne veut pas retarder les dates au plus tôt des successeurs immédiats de C, on ne peut pas retarder C. Il s'agit ici de la marge libre de C qui est donc nulle.

Sur le projet, B n'a qu'un successeur : la tâche D. Donc la marge libre de B est :
$ML(B) = t(D) - t(B) - d(B) = 3 - 0 - 2 = 1$.

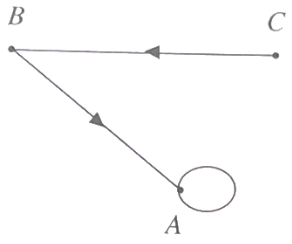
C a deux successeurs : E et F.
On calcule $t(E) - t(C) - d(C) = 7 - 3 - 4 = 0$ et $t(F) - t(C) - d(C) = 8 - 3 - 4 = 1$.
Le plus petit de ces deux nombres est 0, donc la marge libre de C est $ML(C) = 0$.

Les valeurs des différentes marges de chaque tâche du projet sont consignées dans le tableau suivant :

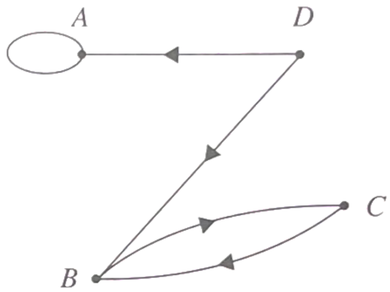
Tâche	A	B	C	D	E	F	G
Marge Totale	0	1	1	0	2	0	0
Marge libre	0	1	0	0	2	0	0

Exercice 1

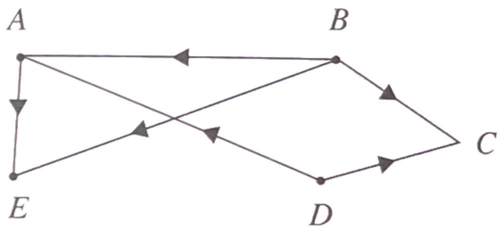
Pour chacun des graphes suivants, faire le tableau des successeurs et des prédécesseurs.



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

Exercice 2

Pour chacun des graphes de l'exercice 1, écrire la matrice d'adjacence (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique).

Exercice 3

Compléter chaque tableau en ajoutant les prédécesseurs, puis construire le graphe associé.

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	B, C	B	B, D	C
Prédécesseurs				

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	C	A, C	D	B
Prédécesseurs				

Exercice 4

Écrire la matrice d'adjacence de chacun des graphes de l'exercice 3.

Exercice 5

Compléter chaque tableau en ajoutant les successeurs

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs					
Prédécesseurs	B, E	A	B, C, D, E	A	B

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs					
Prédécesseurs	B	C, D, E	A, E	C	D

Exercice 6

M_1 et M_2 sont les matrices d'adjacence de deux graphes définis respectivement sur les ensembles $S_1 = \{A; B; C; D\}$ et $S_2 = \{A; B; C; D; E\}$. Faire le tableau des successeurs et des prédécesseurs de chaque graphe.

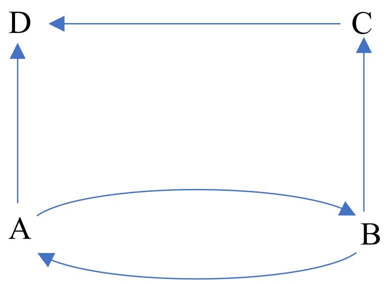
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

a. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe ci-dessous.

b. Calculer M^2. Expliquer la signification des 4 nombres de la 2ème ligne de la matrice M^2.

3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 dans le graphe ? Les citer.



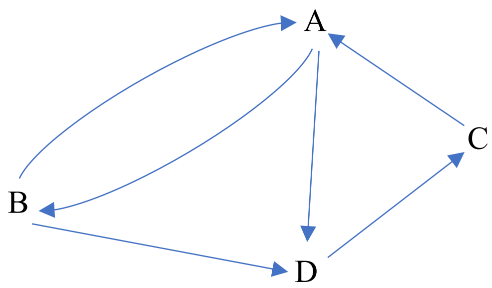
Exercice 8

a. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe ci-dessous.

b. Calculer M^3. Expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il existe 2 chemins de longueur 3 reliant B à A. Citer ces 2 chemins.

c. Le graphe possède-t-il des circuits de longueur 3 ?

d. Calculer M^4. Entre quels sommets n'existe-t-il pas de chemins de longueur 4 ?

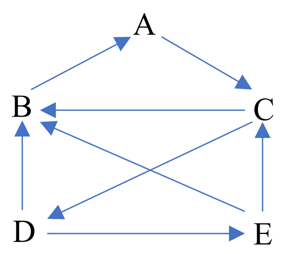


Exercice 9

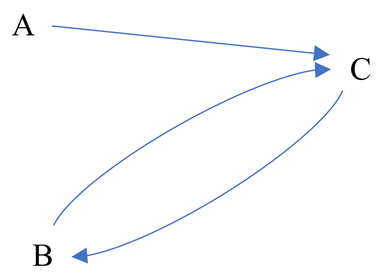
a. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe ci-contre.

b. Calculer M^4.

c. Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 qui partent de A ? Citer ces chemins. Parmi eux, y a-t-il des chemins hamiltoniens ?

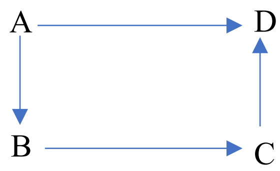


Exercice 10



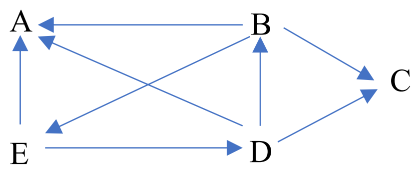
a. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe ci-contre.
b. Quels arcs doit-on ajouter pour faire la fermeture transitive du graphe ?
c. Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$. En déduire la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive.

Exercice 11



a. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe ci-contre.
b. Quels arcs doit-on ajouter pour faire la fermeture transitive du graphe ?
c. Calculer la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive.

Exercice 12 :



Calculer la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive de la fermeture transitive du graphe ci-contre.
Quels arcs doit-on ajouter pour la réaliser ?

Exercice 13 :

Un graphe est défini par le tableau ci-dessous. Déterminer le niveau de chaque sommet et représenter le graphe en tenant compte des niveaux.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Successeurs	C,E	---	F,G	---	B, F	D	D

Exercice 14 :

Un graphe est défini par le tableau ci-dessous. Déterminer le niveau de chaque sommet et représenter le graphe en tenant compte des niveaux.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Successeurs	E, G	---	A, H	F	---	G	---	B, D

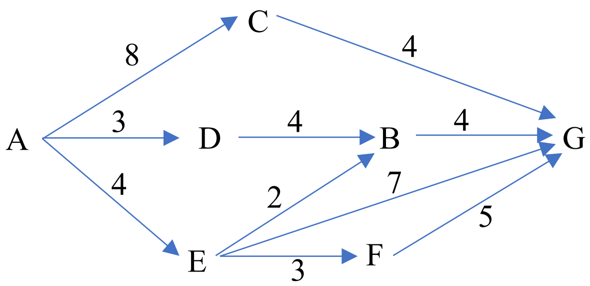
Exercice 15 :

Un graphe est défini par le tableau ci-dessous. Déterminer les prédécesseurs de chaque sommet.
Pourquoi peut-on affirmer que le graphe est une arborescence ? Dessiner cette arborescence.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Successeurs	B, L	D, K	---	---	A, J	C, G, I	---	---	---	F	---	H
Prédécesseurs												

Exercice 16 :

Sept villes notées A, B, C, D, E, F et G constituent un réseau. Sur le graphe valué suivant figurent les liaisons et les durées en heures.



a. On va rechercher le chemin minimal pour aller de A à G. Pour cela, on va se servir de la propriété « *tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux* ». À chaque sommet, on va attribuer une marque en appliquant l'algorithme suivant :

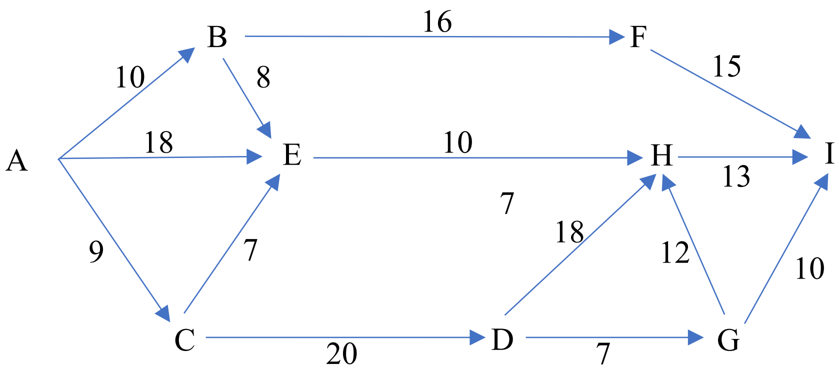
- Les sommets de niveau 0 reçoivent la marque 0.
- Les sommets de niveau 1 reçoivent une marque égale à la valeur minimale des chemins venant du niveau 0.
- Les sommets des autres niveaux reçoivent une marque égale à la valeur minimale de tous les chemins provenant des niveaux précédents.

Appliquer cet algorithme sur le graphe et en déduire la durée minimale du trajet pour aller de A à G.

b. On donner maintenant les distance entre les villes en kilomètres : AC = 500, AD = 200, AE = 210, BG = 250, CG = 200, DB = 250, EB = 180, EF = 200, EG = 450, FG = 210.
Appliquer l'algorithme sur le graphe et en déduire la longueur minimale du trajet pour aller de A à G.

Exercice 17 :

Sur le graphe ci-dessous, déterminer le chemin de longueur minimale reliant A à I, puis le chemin de longueur maximale reliant A à I.



Exercice 18 :

La mise en service d'un nouvel équipement routier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Durées (en jours)	6	3	6	2	4	3	1
Tâches antérieures	aucune	aucune	aucune	B	B	A, D	C, E, F

a. Déterminer le niveau de chacune des tâches.

b. Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

c. Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?

d. Calculer la marge totale de la tâche E. Quelle est sa signification ?

e. Calculer la marge libre de la tâche C. Quelle est sa signification ?

Exercice 19 :

La réalisation d'un projet nécessite plusieurs tâches successives dont les durées sont données dans le tableau suivant, ainsi que les tâches devant être réalisées antérieurement.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Durées (en jours)	4	2	2	1	2	5	3	3	3	4
Tâches antérieures	aucune	aucune	A	A	A, B	C	D, E	E, G	H	F, I

a. Déterminer le niveau de chacune des tâches.

b. Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

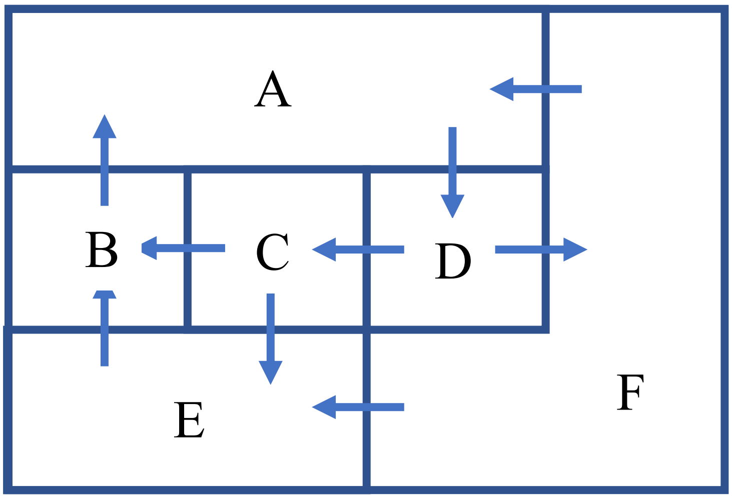
c. Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?

d. En réalité, la tâche C a nécessité une durée de 5 jours. Est-ce que cela a eu une incidence sur la durée de réalisation du projet ?

Exercice 20 :

Calculer la marge totale et la marge libre de chacune des tâches de l'exercice 19.

Un développeur de jeu vidéo doit travailler sur les déplacements possibles d'un joueur à l'intérieur d'un donjon, composé de 6 salles notées A, B, C, D, E et F. L'entrée et la sortie du donjon ne peut se faire que par la salle F.
À l'intérieur du donjon, les déplacements autorisés par des flèches sur le plan ci-dessous. Par exemple la flèche entre la salle A et la salle B montre que l'on peut aller de la salle B à la salle A mais pas de A vers B.



Partie A

a. Dessiner un graphe modélisant les salles et les déplacements.
b. Faire un tableau donnant les successeurs et les prédécesseurs de chaque sommet.
c. Le graphe peut-il être ordonné par niveau ?
d. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe.

Partie B

a. Calculer M^3. Expliquer la signification des nombres de la dernière ligne de cette matrice.
b. Le joueur se trouvant dans la salle F, déterminer les salles dans lesquelles il peut se retrouver en 4 déplacements. Écrire tous les déplacements correspondants.
c. Est-il possible, à partir de F et en 5 déplacements, de visiter chaque salle ?
d. Le joueur pourra-t-il partir de F et y revenir en exactement 6 déplacements ? Si oui, ces trajets permettent-ils de visiter chaque salle ?

Partie C

Chaque entrée dans une salle coûte un certain nombre de points. Les entrées dans les salles A, B ; C, D, E et F coûtent respectivement 25, 20, 40, 30, 25 et 20 points. Le développeur souhaite que le joueur ne puisse pas faire plus de 8 déplacements à l'intérieur du donjon, à partir de son entrée en F et de son retour en F.

a. Dessiner le graphe valué modélisant la consommation en points de chaque déplacement.
b. Combien de trajets de 8 déplacements le joueur peut-il faire à l'intérieur du donjon ?
c. En effectuant ces 8 déplacements, combien de points le joueur consommera-t-il au maximum ?

Correction

Exercice 1

Sommet	A	B	C
Successeurs	A	A	B
Prédécesseurs	A, B	C	---

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	A	C	B	A, B
Prédécesseurs	A, D	C, D	B	---

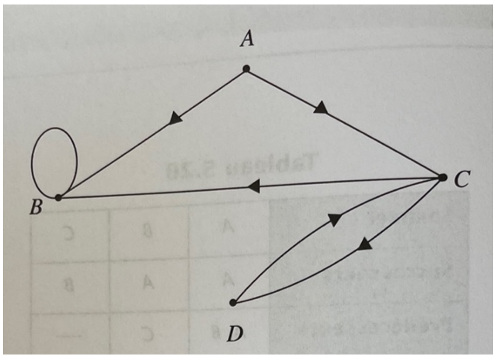
Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs	E	A, C, E	---	A, C	---
Prédécesseurs	B, D	---	B, D	---	A, B

Exercice 2

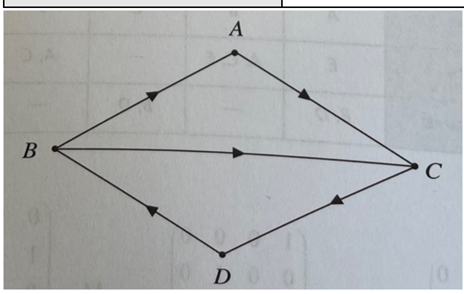
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	B, C	B	B, D	C
Prédécesseurs	---	A, B, C	A, D	C



Sommet	A	B	C	D
Successeurs	C	A, C	D	B
Prédécesseurs	B	D	A, B	C



Exercice 4

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs	B, D	A, C, E	C	C	A, C
Prédécesseurs	B, E	A	B, C, D, E	A	B

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs	C	A	B, D	B, E	B, C
Prédécesseurs	B	C, D, E	A, E	C	D

Exercice 6

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	D	C, D	A, B	B, C, D
Prédécesseurs	B, E	C, D	B, D	A, B, D

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs	C, D	A, E	B, D	B, E	A, C
Prédécesseurs	B, E	C, D	A, E	A, C	B, D

Exercice 7

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de chemin de longueur 2 qui relie B à A et B à C. Il y a 1 chemin de longueur 2 qui relie B à B et 2 chemins de longueur 2 qui relie B à D.

c. Il y a 5 chemins de longueur 2 dans le graphe au total (2+1+1+1) : (A, B, A), (A, B, C), (B, A, B), (B, A, D) et (B, C, D).

Exercice 8

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. La matrice M^3 représente les chemins de longueur 3. Pour la deuxième ligne, le 2 signifie qu'il y a 2 chemins de longueur 3 reliant B à A : (B, A, B, A) et (B, D, C, A).

c. Un circuit est un chemin ayant le même sommet de départ et d'arrivée. La matrice M^3 montre qu'il y a 3 circuits (coef. de la diagonale), au départ de A, de C et de D.

d. Il n'y a aucun chemin de longueur 4 entre D et B.

Exercice 9

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Il y a 4 chemins de longueur 4 au départ de A (somme des coef. de la ligne 1).
Un chemin de A à A : (A, C, D, B, A).
Un chemin de A à B : (A, C, D, E, B).
Deux chemins de A à C : (A, C, B, A, C) et (A, C, D, E, C).
Pas de chemin hamiltonien.

Exercice 10

a. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b. Il faut rajouter les arcs (B, B), (C, C) et (A, B).

c. $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{M} = M + M^{[2]} + M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11

a. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
b. Il faut rajouter les arcs (A, C) et (B, D).

c. $\widehat{M} = M + M^{[2]} + M^{[3]} + M^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

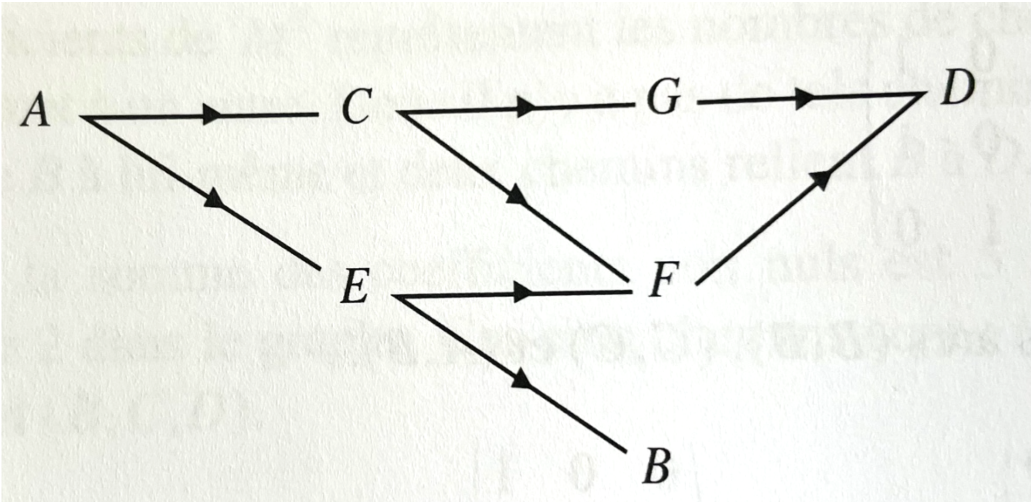
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Le seul arc à rajouter est (D, E).

Exercice 13 :

On cherche les prédécesseurs :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Successeurs	C,E	---	F,G	---	B, F	D	D
Prédécesseurs	---	E	A	F, G	A	C, E	C

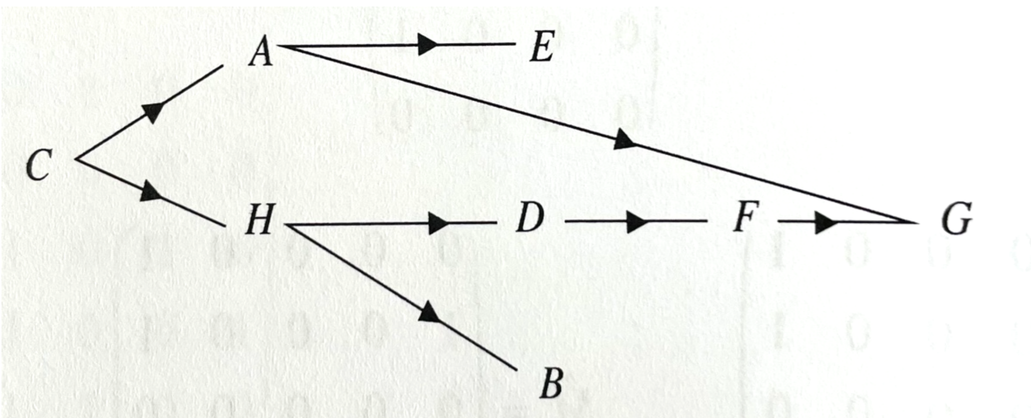
$S_0 = \{A\}$, $S_1 = \{C, E\}$, $S_2 = \{B, F, G\}$, $S_3 = \{D\}$



Exercice 14

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Successeurs	E, G	---	A, H	F	---	G	---	B, D
Prédécesseurs	C	H	---	H	A	D	A, F	C

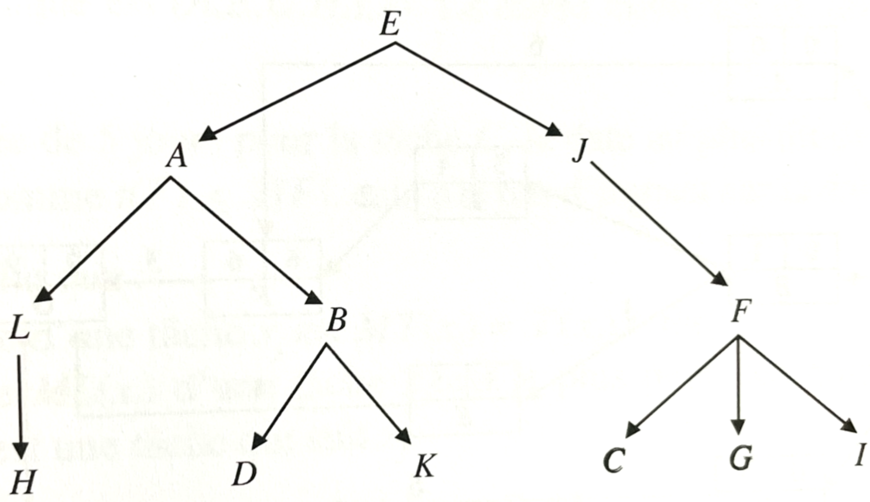
$S_0 = \{C\}$, $S_1 = \{A, H\}$, $S_2 = \{B,\ D, E\}$, $S_3 = \{F\}$, $S_4 = \{G\}$



Exercice 15

Un sommet n'a pas de prédécesseur et chaque sommet n'a qu'un seul prédécesseur. Ainsi chaque sommet est relié à E par un chemin unique. Le graphe est donc une arborescence dont la racine E.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Successeurs	B, L	D, K	---	---	A, J	C, G, I	---	---	---	F	---	H
Prédécesseurs	E	A	F	B	---	J	F	L	F	E	B	A



Exercice 16

a. A reçoit la marque 0.
C, D et E sont de niveau 1, chacun d'eux n'a qu'un prédécesseur, donc on leur attribue respectivement les marques 8, 3 et 4.
Deux chemins arrivent sur B, de durées 3+4=7 et 4+2=6 donc on attribue la marque 6 au sommet B. On attribue la marque 7 à F.
Quatre chemins arrivent sur G : (marque de C)+8=12 ; (marque de B)+4=10, (marque de E)+7=11 ; (marque de F)+5=12. La marque de G est donc 10 et c'est la durée minimale du trajet pour relier A à G.

Le chemin de durée minimale est (A, E, B, G).

b. Le plus court trajet est (A, E, F, G) de longueur 210+ 200+210=620km.

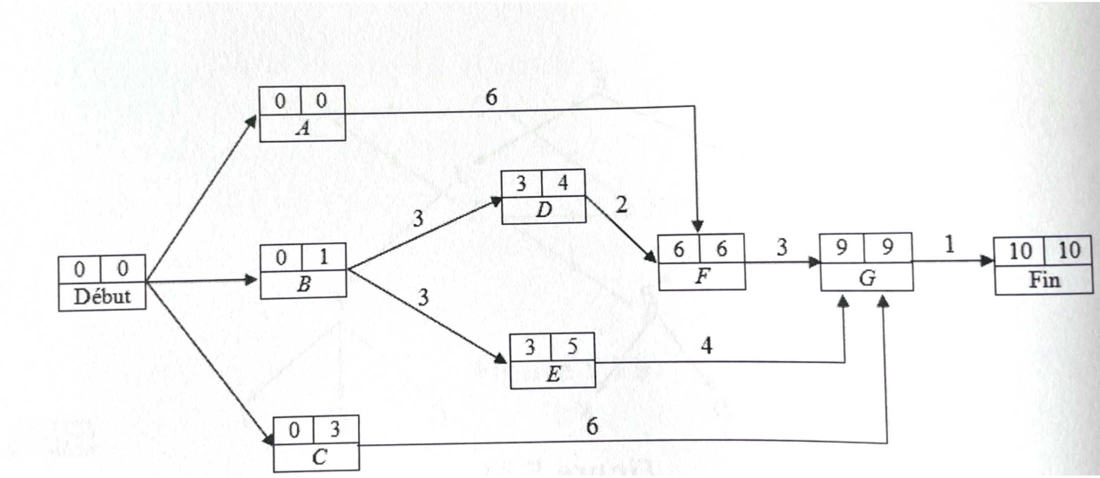
Exercice 17

Le chemin de longueur mini est (A, C, E, H, I) de longueur 39.
Celui de longueur max est (A, C, D, G, H, I) de longueur 61.

Exercice 18

a. $S_0 = \{A;B;C\}$, $S_1 = \{D;E\}$, $S_2 = \{F\}$ et $S_3 = \{G\}$.

b.



c. Le chemin critique est (A, F, G). La durée minimale de réalisation du projet est 10 jours.

d. La marge totale de E est MT(E) = T(E) – t(E) = 5 – 3 = 2 jours.

Cela veut dire que l'on peut accepter au maximum deux jours de retard sur le départ de la tâche E sans que cela ne retarde la date de fin du projet.

e. La marge libre de la tâche C est ML(C) = t(G) – t(C) – d(C) = 9 – 0 – 6 = 3 jours.

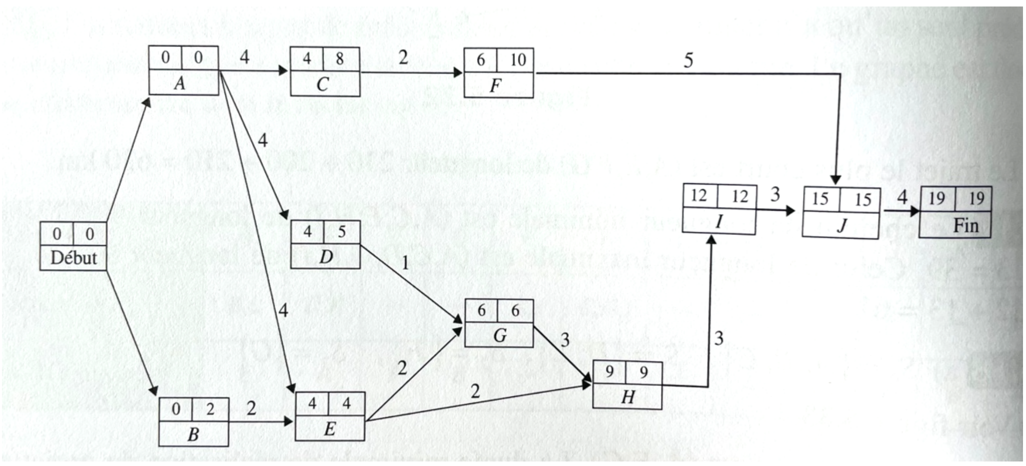
C'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début de la tâche C sans que cela ne retarde la date de début au plus tôt de la tâche G(la seule tâche qui suit immédiatement c).

Exercice 19

a.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Niveau	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5

b.



c. Le chemin critique est (A, E, G, H, I, J). La durée minimale de réalisation du projet est 19 jours.

d. Avec une durée de 5 jours pour la tâche C, la date au plus tôt de la tâche F est t(F) = 9. Comme t(F) < T(F), cela n'a pas d'impact sur la date de fin du projet.

Exercice 20

On rappelle que :

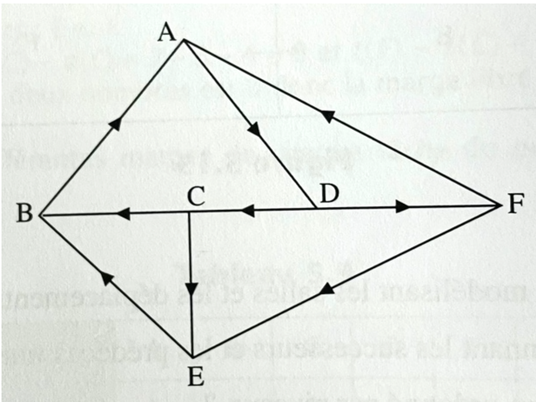
- La marge totale d'une tâche x_j est $MT(x_j) = T(x_j) - t(x_j)$.
- La marge libre d'une tâche x_j est le plus petit des nombres $t(x_k) - t(x_j) - d(x_j)$, où x_k est une tâche qui suit x_j.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Marge totale	0	2	4	1	0	4	0	0	0	0
Marge libre	0	2	0	1	0	4	0	0	0	0

Gros TD

Partie A

a.



b.

Sommets	A	B	C	D	E	F
Successeurs	D	A	B, E	C, F	B	A, E
Prédécesseurs	B, F	C, E	D	A	C, F	D

c. Chaque sommet à au moins 2 prédécesseurs, donc par possible ordonner par niveau.

d.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

a.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

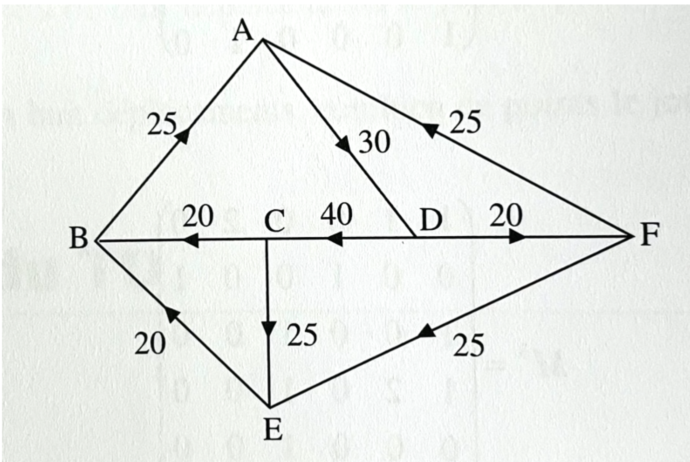
Un chemin va de F à A, à C et à F.
Pas de chemin de F à B, à D et à E.

b.
La dernière ligne de M^4 est 1 1 0 1 2 0. Cette ligne donne le nombre de chemin de longueur 4 au départ de F.
En 4 déplacements, le joueur pourra se retrouver en A (FADFA), en B (FADCB), en D (FEBAD) ou en E (FADCE ou FADFE).

c. La dernière ligne de M^5 est 1 2 1 1 0 1.
FADCBA non
FADFEB (non) et FADCEB (oui : hamiltonien)
FEBADC (oui : hamiltonien)
FADFAD (non)
FEBADF (non)

d. Avec M^6, on voit qu'il n'y a qu'un seul chemin qui relie F à lui-même : FADFADF et il ne passe pas par toutes les salles.

Partie C
a.



b. Le calcul de M^8 permet de dire qu'il y a 3 circuits de longueur 8 de F à F.
- FADCEBADF : 25+30+40+25+20+25+30+20=215.
- FEBADFADF et FADFEBADF : 195.