

**AGADADAGA**  
d'après Olympiade 2019

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.

Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.

Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

**Traitement de texte**

Astrid rentre le *mot* A.

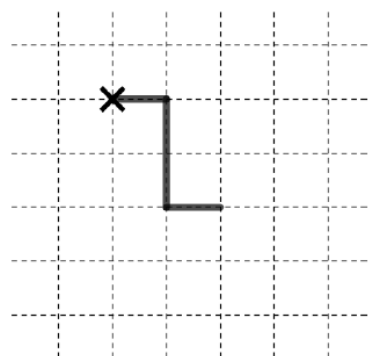
2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?

3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?

4. Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

**Motif**

Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :



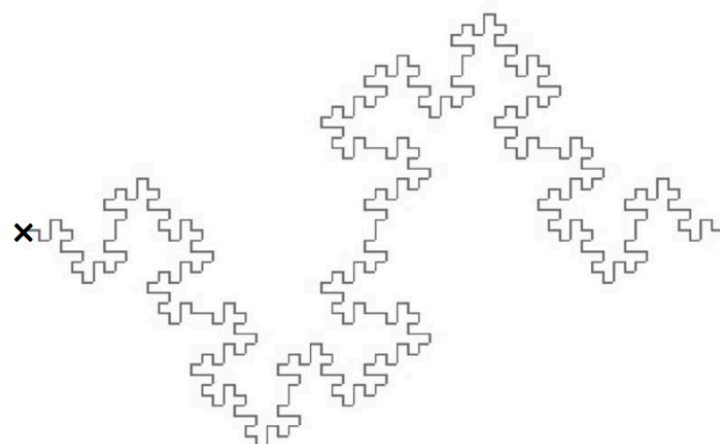
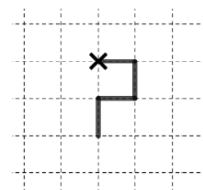
- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.

5. Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?

6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.

7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?



8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.

a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?

b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du 8. comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.