

## Création d'une fonction

*d'après Olympiade 2014*

On suppose qu'une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vérifie la propriété (P) :  $f(m + n) = f(m) + f(f(n))$  pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

1. Déterminer la valeur de  $f(f(0))$ .

En déduire la valeur de  $f(0)$ .

2. Montrer que :

$$f(f(n)) = f(n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

3. Exprimer  $f(m + 1)$  en fonction de  $f(m)$  et de  $f(1)$ .

4. Montrer que :

$$f(m) = mf(1) \text{ pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}$$

5. Déterminer toutes les fonctions  $f$  vérifiant la propriété (P).