Création d'une fonction - correction

d'après Olympiade 2014

On suppose qu'une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie la propriété (P) : $f(m+n) = f(m) + f(f(n))$ *pour tout m de* $\mathbb{N}$ *et tout n de* $\mathbb{N}$.

1.

En prenant *m=0* et *n=0*, on obtient :

$$f(0+0) = f(0) + f\big(f(0)\big) \Leftrightarrow f(0) = f(0) + f\big(f(0)\big) \Leftrightarrow f(0) - f(0) = f\big(f(0)\big) \Leftrightarrow f\big(f(0)\big) = 0$$

Pour *f(0)* il fallait être astucieux :
En prenant *m=0* et *n=f(0)*, on obtient :

$$f(0+f(0)) = f(0) + f(f((f(0))) \Leftrightarrow f\big(f(0)\big) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow 0 = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

2. Montrer que :

$$f\big(f(n)\big) = f(n) \text{ pour tout n de } \mathbb{N}$$

En prenant *m=0* :

$$f(0+n) = f(0) + f(f(n)) \Leftrightarrow f\big(f(n)\big) = f(n)$$

3.
Avec ce que l'on a démontré dans le 2., on sait que $f(1) = f(f(1))$:
En prenant *n=1* :

$$f(m+1) = f(m) + f(f(1)) \Leftrightarrow f(m+1) = f(m) + f(1)$$

4. Montrer que :

$$f(m) = mf(1) \text{ pour tout m de } \mathbb{N}$$

En s'aidant des suites :
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = f(n)$.
On a donc : $u_{n+1} = f(n+1) = f(n) + f(1) = u_n + u_1$.
u_1 étant un terme constant, on reconnait une suite arithmétique de raison u_1 et de premier terme $u_0 = f(0) = 0$.
On a donc : $u_n = 0 + n \times u_1$
Ce qui donne : $f(n) = nf(1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

5. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).

On a donc : $f\big(f(n)\big) = f(n)$ *et* $f(n) = nf(1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
En partant de $f\big(f(n)\big) = f(n)$:
on a :

$$f\big(nf(1)\big) = nf(1) \quad \textit{en utilisant } f(n) = nf(1)$$
$$nf(1)f(1) = nf(1) \quad \textit{en utilisant encore } f(n) = nf(1)$$
$$f(1)f(1) = f(1) \quad \textit{en prenant } n = 1$$
$$f(1)f(1) - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1)(f(1)-1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \textit{ ou } f(1) = 1$$

Examinons ces 2 cas :

- Si $f(1) = 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$ $f(n) = nf(1) = 0$.

  f est la fonction nulle.
- Si $f(1) = 1$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$ $f(n) = nf(1) = n$.