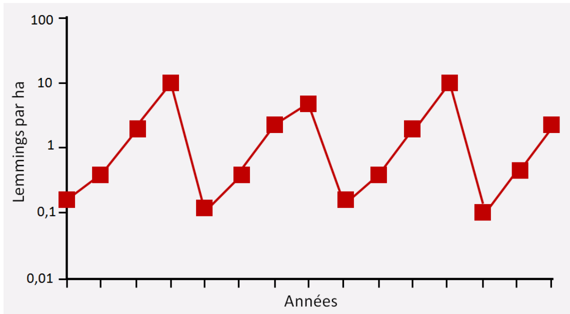
Modélisation de l'évolution de population des lemmings

Le lemming, outre être un animal fort mignon, a durant longtemps eu mauvaise réputation. En effet, on avait attribué la forte variabilité de sa population, qui semblait parfois quasiment disparaitre à son caractère suicidaire. Et cela a été accentué par un documentaire de Walt Disney en 1958, où l'on voyait des milliers de lemmings se jeter d'une falaise. En fait, l'équipe du film n'avait pas hésiter à pousser dans le vide des milliers d'animaux pour les besoins du film.



Mais il était difficilement imaginable d'envisager que le nombre de lemmings d'une colonie puisse varier autant que cela (cf. diagramme ci-contre).
Nous allons nous intéresser à la modélisation de population. Pour cela, nous allons utiliser ce que nous appellerons un modèle de croissance.

Pour la suite de notre travail, P_0 représentera la population à l'année 0, P_1 la population à l'année 1, et ainsi de suite. P_t sera la population à l'année t, et P_{t+1} la population l'année suivante, c'est-à-dire t+1.
R sera le taux de croissance de notre population, qui peut dépendre du taux de natalité, de mortalité, mais nous n'entrerons pas dans ses détails. K sera la capacité biotique de l'endroit où nos lemmings vivent.

Maintenant réfléchissons. Si l'évolution d'une population évoluait régulièrement, cela signifierait que nos lemmings nous auraient depuis fort longtemps submergé en nombre, ou disparu, ou leur nombre n'aurait pas bougé. Par conséquent, un modèle tel que celui-là : $P_{t+1} = R+P_t$ n'est pas réaliste.
Vous allez tester un modèle de ce type désormais : $P_{t+1} = R \text{x} P_t$. Pour cela, vous pourrez prendre une population de départ P_0 de 10. Vous vous aiderez d'une calculatrice ou d'un tableur, et vous ferez variez le taux de croissance.
Est-ce que ce modèle pour semble correct au vu de l'évolution de notre population de Lemmings ?

……

……

……

……

……

Pour nous rapprocher de leur évolution, nous allons rajouter ce que nous appellerons un facteur rétroactif. Notre modèle devient :

$$P_{t+1} = R \text{x} P_t \text{x} (1-\frac{P_t}{K}) \quad \textit{(modèle logistique)}$$

En partant d'une population de départ de 10 individus, d'une capacité biotique de 50, étudiez l'influence du taux de croissance sur l'évolution de la population de lemmings et proposez un taux de croissance qui pourrait convenir. Pour cela vous travaillerez par 2, vous avez droit à la calculatrice ou à l'ordinateur.

……

……

……

……

Nous allons désormais nous intéresser à l'étude de cette suite logistique qui nous réserve bien des surprises comme vous avez dû vous en rendre compte.

Pour simplifier notre étude, nous allons modifier quelque peu la suite en enlevant la capacité biotique.

Nous étudierons donc la suite suivante :

$$x_{n+1} = a \times x_n \times (1 - x_n) \; et \; x_0 = 0{,}5$$

Nous allons chercher à voir l'influence du paramètre a de plus près.

Nous allons utiliser Python pour programmer notre suite.

```
x=0,5               # initialisation de la suite
x=a*x*(1-x)         # définition de la suite x_{n+1} = a × x_n × (1 − x_n)
```

Nous allons définir une fonction qui nous permettra de calculer facilement les termes de la suite. Cette fonction aura 2 paramètres : a et n (le dernier terme calculé).

```
def suite_logi(a,n):
  i,x=0,0.5
  for i in range(n):
    x=a*x*(1-x)
    print(x)
```

Notre fonction va nous permettre d'étudier la suite logistique en faisant varier le paramètre a et d'afficher les n premiers termes.

À vous !

En demandant à votre programme de calculer et d'afficher les 100 premiers termes de la suite, et en faisant varier le paramètre a, essayez de comprendre le comportement de cette suite.

Vous pourrez vous concentrer sur des valeurs entre 0 et 1, puis 1 et 2, 2 et 3, puis entre 3 et 4 en insistant sur cet intervalle...

Observations :

……

……

……

……

……

………
………
………
………
………
………
………

Vous avez dû remarquer que, suivant la valeur de a, votre suite avait une limite simple, mais sur certaines valeurs « plusieurs limites ». On parlera dans ce cas d'adhérence, sans rentrer dans les détails.
Nous allons nous intéresser aux nombres de points d'adhérences de notre suite en fonction de a.
Pour cela, il va nous falloir récolter ces informations grâce à notre programme Python. Pour ce faire, nous allons travailler avec le programme suivant :

```
def suite_logi(a,n):
   x=0.5
   for i in range(n):
      x=a*x*(1-x)
   return x



import matplotlib.pyplot as plt
a = 0
Lx,Ly =[],[]                                   #création des listes de stockage des abscisses et ordonnées des points
while a<=4:
   x = suite_logi(a,200)
   for i in range(20):
         x=a*x*(1-x)
         Lx.append(a)
         Ly.append(x)
   a = a+0.001
plt.grid(True)
plt.plot(Lx,Ly,linestyle = 'none',marker = ',')
plt.show()
```

Essayez de comprendre chaque ligne du programme et de le faire tourner.

Analysez ce que vous obtenez.
………
………
………
………
………