

## Approximation de $\sqrt{17}$ par des rationnels

d'après Olympiades 2014

1. Vérifier l'égalité :  $\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{\sqrt{17}+4}$ .

2. Soit a et b deux réels supérieurs ou égaux à 4 et encadrant  $\sqrt{17}$  :

$$a < \sqrt{17} < b \quad (1)$$

a) Justifier le nouvel encadrement :

$$4 + \frac{1}{b+4} < \sqrt{17} < 4 + \frac{1}{a+4} \quad (2)$$

b) Calculer l'amplitude de l'encadrement (2) et montrer que cette amplitude ne dépasse pas  $\frac{1}{64}(b-a)$ .

c) Interpréter ce résultat en termes de précision des encadrements (1) et (2)

3. Application : On considère l'encadrement

$$4 < \sqrt{17} < 5 \quad (\text{étape 0})$$

a) Déterminer, à l'aide de (2), un nouvel encadrement rationnel de  $\sqrt{17}$  (étape 1), et donner l'amplitude de cet encadrement.

b) A l'aide de l'encadrement obtenu à l'étape 1 et de (2), donner un nouvel encadrement de  $\sqrt{17}$  (étape 2).

c) Continuer jusqu'à l'étape 3.

Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

4. On souhaite obtenir un encadrement de  $\sqrt{17}$  d'amplitude inférieure ou égale à  $10^{-9}$  à l'aide du procédé décrit ci-dessus pour toutes valeurs de a et b choisies vérifiant les conditions du 2). Pour cela, on souhaite réaliser un algorithme qui enchaîne les étapes jusqu'à la précision exigée sur l'amplitude.

a) Que réalise l'algorithme suivant :

Saisir A, B C prend la valeur de A A prend la valeur de B B prend la valeur de C Afficher A et B
--

b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde à la question 4 :

Saisir A, B E = B - A    # On utilisera E pour l'amplitude de l'encadrement N = 0        # On utilisera N pour numéroter les étapes ... Afficher A, B, E, N
---