Approximation de $\sqrt{17}$ par des rationnels

d'après Olympiades 2014

1.

$$4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}=4+\frac{\sqrt{17}-4}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}=4+\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}^2-4^2}=4+\frac{\sqrt{17}-4}{17-16}=4+\sqrt{17}-4=\sqrt{17}$$

2. Soit a et b deux réels supérieurs ou égaux à 4 et encadrant $\sqrt{17}$:

$$a<\sqrt{17}<b \qquad (1)$$

a) Justifier le nouvel encadrement.

$$4\leq a<\sqrt{17}<b \Leftrightarrow a+4<\sqrt{17}+4<b+4 \Leftrightarrow \frac{1}{b+4}<\frac{1}{\sqrt{17}+4}<\frac{1}{a+4} \Leftrightarrow 4+\frac{1}{b+4}<4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}<4+\frac{1}{a+4}$$

$$\Leftrightarrow 4+\frac{1}{b+4}<\sqrt{17}<4+\frac{1}{a+4}$$

b) Calculer l'amplitude de l'encadrement (2) et montrer que cette amplitude ne dépasse pas $\frac{1}{64}(b-a)$.

L'amplitude est de : $4+\frac{1}{a+4}-\left(4+\frac{1}{b+4}\right)=4+\frac{1}{a+4}-4-\frac{1}{b+4}=\frac{1}{a+4}-\frac{1}{b+4}=\frac{b+4}{(a+4)(b+4)}-\frac{a+4}{(a+4)(b+4)}=\frac{b-a}{(a+4)(b+4)}$

On a $4\leq a<b \Leftrightarrow 4+4\leq a+4<b+4 \Leftrightarrow 8\leq a+4<b+4$

D'où : $\frac{1}{8}\geq\frac{1}{a+4}>0$ et $\frac{1}{8}>\frac{1}{b+4}>0$ et donc $\frac{b-a}{(a+4)(b+4)}<\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times(b-a)=\frac{1}{64}(b-a)$.

c)

Entre les phase 1 et 2, l'encadrement est divisé par au-moins 64. On gagne en précision à chaque étape !

3. Application : On considère l'encadrement

$$4<\sqrt{17}<5 \qquad (\acute{e}tape\ 0)$$

a) Déterminer, à l'aide de (2), un nouvel encadrement rationnel de $\sqrt{17}$ (étape 1), et donner l'amplitude de cet encadrement.

$4<\sqrt{17}<5$ donne $4+\frac{1}{5+4}<\sqrt{17}<4+\frac{1}{4+4} \Leftrightarrow 4+\frac{1}{9}<\sqrt{17}<4+\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{37}{9}<\sqrt{17}<\frac{33}{8}$

Amplitude : $\frac{33}{8}-\frac{37}{9}=\frac{1}{72}\approx 0{,}014$

b) A l'aide de l'encadrement obtenu à l'étape 1 et de (2), donner un nouvel encadrement de $\sqrt{17}$ (étape 2).

En partant de $\frac{37}{9}<\sqrt{17}<\frac{33}{8}$, on trouve : $4+\frac{1}{\frac{33}{8}+4}<\sqrt{17}<4+\frac{1}{\frac{37}{9}+4} \Leftrightarrow \frac{268}{65}<\sqrt{17}<\frac{301}{73}$

Amplitude : $\frac{301}{73}-\frac{268}{65}=\frac{1}{4745}\approx 2{,}1\times10^{-4}$

c) Continuer jusqu'à l'étape 3.

En partant de $\frac{268}{65}<\sqrt{17}<\frac{301}{73}$, on trouve : $4+\frac{1}{\frac{301}{73}+4}<\sqrt{17}<4+\frac{1}{\frac{268}{65}+4} \Leftrightarrow \frac{2445}{593}<\sqrt{17}<\frac{2177}{528}$

Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

Amplitude : $\frac{2177}{528}-\frac{2445}{593}=\frac{1}{313104}\approx 3{,}2\times10^{-6}$

4. On souhaite obtenir un encadrement de $\sqrt{17}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-9} à l'aide du procédé décrit ci-dessus pour toutes valeurs de a et b choisies vérifiant les conditions du 2). Pour cela, on souhaite réaliser un algorithme qui enchaîne les étapes jusqu'à la précision exigée sur l'amplitude.

a) Que réalise l'algorithme suivant :

```
Saisir A, B
C prend la valeur de A
A prend la valeur de B
B prend la valeur de C
Afficher A et B
```

Il permet que A prenne la valeur de B et B la valeur de C.

b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde à la question 4 :

```
Saisir A, B
E = B – A      # On utilisera E pour l'amplitude de l'encadrement
N = 0          # On utilisera N pour numéroter les étapes
Tant que E>10^-9
      C prend la valeur de A
      A prend la valeur de 4 + 1/(B+4)
      B prend la valeur de 4 + 1/(C+4)
Fin Tant que
Afficher A, B, E, N
```