

Fonction Somme de carrés

D'après Olympiade 2017

On considère la fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.

Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(23) = 2^2 + 3^2 = 13$, $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

- Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f .
- Calculer $f(23)$, $f(32)$ et $f(320)$.
- Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f .

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0 , on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, ..., $u_{n+1} = f(u_n)$, ...

- Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.

Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?

- Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_8$ pour $u_0 = 4$.

Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée P dans la suite du problème :

Si u_0 est un entier non nul :

- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N , $u_n = 1$.

- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, ...

On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

- Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
- Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété P .
- Comment le programme se comporterait-il si un nombre ne vérifiait pas la propriété ?
- Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété P . Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u entier naturel non nul

Entrer u

Tant que ($u \neq 1$ et $u \neq 4$)

$u \leftarrow f(u)$

Afficher u

Fin tant que

Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété P s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

- Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100 \times a + 10 \times b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0 .

- Montrer que $81p < 10^{p-1}$, revient à $9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10 + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

c. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $p \geq 4$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

d. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.