Fonction Somme de carrés - correction

D'après Olympiade 2017

On considère la fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(23) = 2^2 + 3^2 = 13$, $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. a.
$f(1) = 1$, $f(11) = 2$ et $f(111)$=3.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = n$.

b.

$$f(23) = f(32) = f(320) = 13$$

c.
On a montré dans le 1.a. que tout entier n admet un antécédent. À cet écriture, il suffit d'intercaler des zéros et on trouve ainsi une infinité d'antécédent pour tout entier naturel n non nul.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, ... , $u_{n+1} = f(u_n)$, ...
2.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

3. Calculer les nombres u_0, u_1, u_2, ..., u_8 pour $u_0 = 4$.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
4	16	37	58	89	145	42	20	4

La suite va donc se répéter comme cela à l'infini.

Étude d'une propriété

4. a.

$$u = 42$$
$$u \leftarrow f(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$u \leftarrow f(20) = 2^2 + 0^2 = 4$$

b.
Pour parler de la propriété, si il existe un entier naturel N tel que $u_N = 1$, alors pour tout n>N, $u_n = 1$.
De plus si il existe un rang M tel que $u_M = 4$, alors les termes se répèteront avec une période de 8.
Ainsi, pour montrer que la propriété P est vérifiée il suffit de montrer qu'il existe un rang à partir duquel il existe un rang M tel que $u_M = 4$ ou 1.
C'est ce que fait cet algorithme en calculant les termes de la suite jusqu'à ce qu'un terme soit égal à 1 ou 4.
c.
Dans ce cas-là, la suite ne prendrait jamais les valeurs 1 ou 4, et donc la boucle serait infinie.
d.
Il suffit de faire tourner l'algorithme pour toutes valeurs entières comprise entre 1 et 99.

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété P s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.
5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100 \times a + 10 \times b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

$$x - f(x) = 100 \times a + 10 \times b + c - f(100 \times a + 10 \times b + c) = 100 \times a + 10 \times b + c - (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 100 \times a + 10 \times b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - 1) + c(1 - c)$$

On a $a(100 - a) \geq 99$, $b(10 - 1) \geq 0$, donc $x - f(x) = (100 - a) + b(10 - 1) + c(1 - c) \geq 99 + c - c^2$.

De même $c(1 - c)$ est compris entre -72 et 0.

Donc : $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 \geq 99 - 72 = 27 > 1 > 0$

Et donc, $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

On vient de montrer que $f(x) \leq x - 1$, donc que $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante lorsque les termes de (u_n) sont composé de 3 chiffres. Donc à partir d'un certain rang, les termes de (u_n) seront inférieurs ou égal à 99.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.

6. a.

$$9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1 \Leftrightarrow 9p \leq \frac{1 - 10^{p-1}}{1 - 10} \ (\textit{somme des termes d'une suite géométrique})$$

$$\Leftrightarrow 9p \leq \frac{10^{p-1} - 1}{9} \Leftrightarrow 81p \leq 10^{p-1} - 1 \Leftrightarrow 81p + 1 \leq 10^{p-1} \Leftrightarrow 81p < 10^{p-1} \ \textit{car nous travaillons avec des entiers}$$

b.

Nous allons montrer : $9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1$

$$10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10 + 1) + 1$$

Or dans $10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10 + 1$, nous avons (p-3) nombres supérieurs ou égaux à 10.

Donc : $10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10 + 1 \geq 10(p - 3) + 1$.

D'où :

$$10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10 + 1) + 1 \geq 10(10(p - 3) + 1) + 1 = 100p - 289$$

$100p - 289$ est supérieur strictement à 9p dès que p est supérieur ou égal à 4.

Nous avons bien $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1 \geq 9$ et donc $81p < 10^{p-1}$.

c. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $p \geq 4$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

Les p chiffres de u_n sont inférieur ou égal à 9, donc leur carré est inférieur ou égal à 81 et donc leur somme $(f(u_n))$ est inférieur à 81p qui est lui-même inférieur à 10^{p-1}. $f(u_n)$ s'écrit donc avec au plus $p - 1$ chiffres.

d. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq$ 999. Conclure.

On a montré la diminution du nombre de chiffres pour les nombres de plus de 3 chiffres. La propriété P est donc vraie.