La trompette

d'après Olympiade 2018

Partie A : le volume de la trompette

Un objet a la forme d'une « trompette » : un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Ox) le morceau de parabole qui représente la fonction carré sur [0 ;1] (Figure 1). On souhaite calculer le volume de cet objet.

Pour obtenir une valeur approchée par excès du volume de la trompette, on adopte le principe suivant: on partage le segment [0 ; 1] en n parties égales, n étant un entier supérieur ou égal à 2 ; on construit des cylindres extérieurs à la trompette, comme l'indique la Figure 2 (cas où $n = 6$).

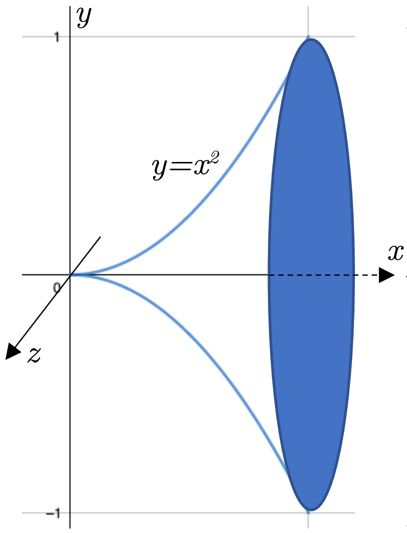


Figure 1

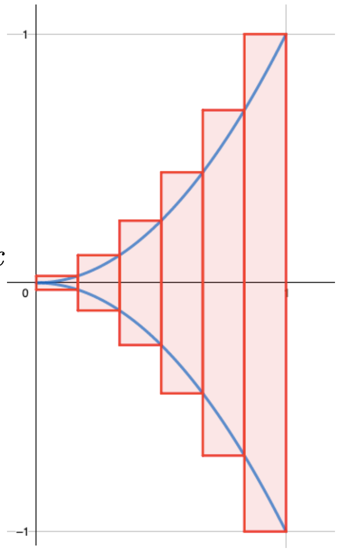


Figure 2

1. a. Déterminer le rayon et la hauteur de chacun des deux premiers cylindres lorsque $n = 6$.

b. Calculer le volume des deux premiers cylindres lorsque $n = 6$ puis dans le cas général, pour une valeur quelconque de n (n étant un entier supérieur ou égal à 2)

2. Concevoir un algorithme qui calcule et affiche la somme des volumes des n cylindres ainsi construits lorsqu'on saisit un entier n supérieur ou égal à 2.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note Vn la somme des volumes des n cylindres construits comme indiqué précédemment. Démontrer que

$$V_n = \frac{\pi}{n^5}(1 + 2^4 + \cdots + n^4)$$

4. Calculer une estimation du volume de la trompette, obtenue à l'aide de la somme des volumes de 160 cylindres. On arrondira le résultat au centième près.

Rappel calculatrice :

Ti83 Somme :

2$^{\text{nde}}$ stats puis MATH/som(

Ensuite : 2$^{\text{nde}}$ stats puis OP/suite(

Dans la fenêtre qui s'affiche vous allez rentrer le terme général de votre suite : $\pi \times n^2/160^5$. Vous déclarez que n est la variable, que le début se fait à 1 et la fin à 160, et enfin que le pas est de 1 pour la variable.

Remarque : si votre calculatrice est en mode fonction la variable affichée n'est pas n mais X.

Partie B : des calculs de sommes

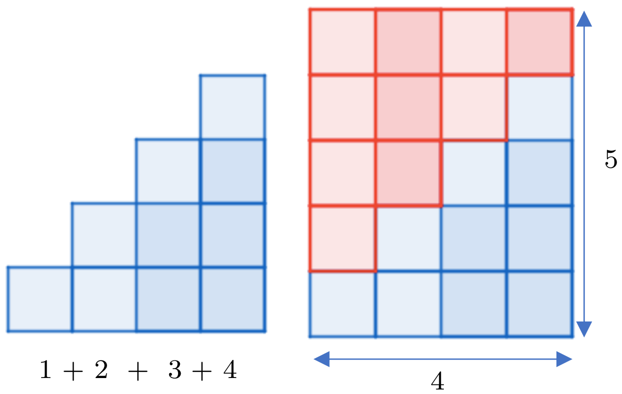
L'objectif de cette partie est de découvrir une méthode permettant le calcul direct de la somme $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ qui intervient dans le calcul du volume de la trompette.

1. Pour un entier n supérieur ou égal à 2, on considère la somme des n premiers entiers naturels non nuls :

$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

La figure ci-contre suggère une façon de calculer $1 + 2 + 3 + 4$.

Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



2. Pour démontrer cette formule, on propose ci-après une autre méthode, intéressante car elle s'applique encore pour calculer d'autres sommes. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

a. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $C_n = C_{n+1} - n^2 - 2n - 1$.
b. On a pour tout entier $n \geq 2$:

$$C_{n+1} = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + \cdots + ((n-1)+1)^2 + (n+1)^2$$

Développer chaque carré, puis justifier que $C_{n+1} = C_n + 2 \times S_n + (n+1)$.
c. Déduire des questions précédentes la valeur de S_n.

3. a. Soit k un entier naturel. Développer $(k + 1)^3$.
3. b. En s'inspirant de la méthode décrite au 2., déterminer une formule permettant, pour tout entier $n \geq 2$, de calculer rapidement la somme $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

4. La même méthode permet de démontrer les résultats suivants, que l'on admettra : pour tout entier $n \geq 2$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ et $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.
En déduire un calcul donnant l'approximation du volume de la trompette obtenue en utilisant 160 cylindres.