La trompette - correction

d'après Olympiade 2018

Partie A : le volume de la trompette

Un objet a la forme d'une « trompette » : un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Ox) le morceau de parabole qui représente la fonction carré sur [0 ;1] (Figure 1). On souhaite calculer le volume de cet objet.

Pour obtenir une valeur approchée par excès du volume de la trompette, on adopte le principe suivant: on partage le segment [0 ; 1] en n parties égales, n étant un entier supérieur ou égal à 2 ; on construit des cylindres extérieurs à la trompette, comme l'indique la Figure 2 (cas où $n = 6$).

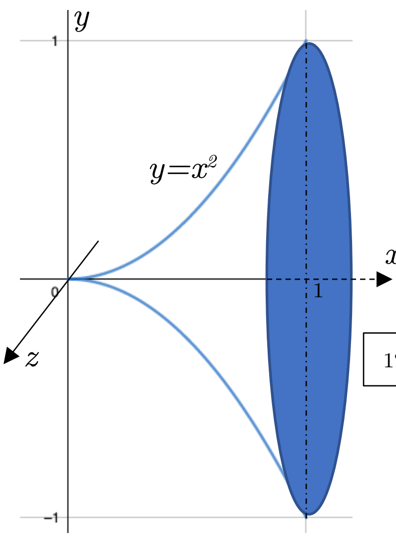

Figure 1

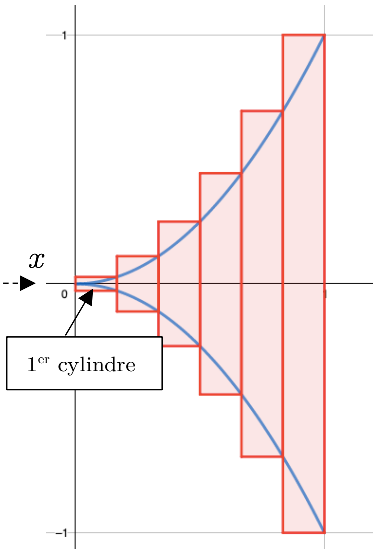

Figure 2

1. a.

1er cylindre : $R_1 = (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$ et $h = \frac{1}{6}$.

2ème cylindre : $R_2 = (\frac{2}{6})^2 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et $h = \frac{1}{6}$.

b.

On rappelle le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :$V = \pi R^2 \times h$.

On a donc : $V_1 = \pi {R_1}^2 \times h = \pi (\frac{1}{36})^2 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{7776}$ et $V_2 = \pi {R_2}^2 \times h = \pi (\frac{1}{9})^2 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{486}$.

Formule générale avec n parties :

Chaque cylindre aura une hauteur de $\frac{1}{n}$.

$R_1 = (\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}$ d'où $V_1 = \pi {R_1}^2 \times h = \pi (\frac{1}{n^2})^2 \times \frac{1}{n} = \frac{\pi}{n^5}$.

$R_2 = (\frac{2}{n})^2 = \frac{2^2}{n^2}$ d'où $V_2 = \pi {R_2}^2 \times h = \pi (\frac{2^2}{n^2})^2 \times \frac{1}{n} = \frac{\pi \times 2^4}{n^5}$.

2.

```
from math import pi

def volume(n):
    V=0
    for k in range(n+1):
        V=V+pi*k**4/n**5
    return V
```

3.

Si il y a n parties, le k-ième cylindre (avec k un entier tel que $1 \leq k \leq n$) a une hauteur de $\frac{1}{n}$ et un rayon de : $R_k = (\frac{k}{n})^2 = \frac{k^2}{n^2}$.

Ce qui donne un volume pour le k-ième cylindre : $V_k = \pi {R_k}^2 \times h = \pi (\frac{k^2}{n^2})^2 \times \frac{1}{n} = \frac{\pi \times k^4}{n^5}$.

Le volume total est : $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{\pi \times 1^4}{n^5} + \frac{\pi \times 2^4}{n^5} + \frac{\pi \times 3^4}{n^5} + \cdots + \frac{\pi \times n^4}{n^5} = \frac{\pi}{n^5}(1 + 2^4 + \cdots + n^4)$

4. Calculer une estimation du volume de la trompette, obtenue à l'aide de la somme des volumes de 160 cylindres soit à l'aide de votre programme soit de votre calculatrice).

On arrondira le résultat au centième près.

On trouve : $V \approx 0{,}64$.

Partie B : des calculs de sommes

L'objectif de cette partie est de découvrir une méthode permettant le calcul direct de la somme $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ qui intervient dans le calcul du volume de la trompette.

1.

Avec les 2 mêmes motifs, on voit que l'on va pouvoir créer un rectangle de n par *n+1* de côté.

On a donc une aire de : $n \times (n+1)$.

Donc pour un seul motif on trouve bien $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Pour démontrer cette formule, on propose ci-après une autre méthode, intéressante car elle s'applique encore pour calculer d'autres sommes. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

a.

$C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ donc $C_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = C_n + (n+1)^2 = C_n + n^2 + 2n + 1$.

Donc, $C_n = C_{n+1} - n^2 - 2n - 1$.

b.

$$C_{n+1} = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + \cdots + \left((n-1)+1\right)^2 + (n+1)^2$$
$$= 0^2 + 2 \times 0 \times 1 + 1^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times 1 + 1^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 1 + 1^2 + \cdots + n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2$$
$$= 1 + 1^2 + 2 \times 1 + 1 + 2^2 + 2 \times 2 + 1 + \cdots + n^2 + 2 \times n + 1$$

Dans cette expression, on retrouve (n+1) fois le chiffre 1 (bleu), on retrouve C_n (jaune) et en factorisant par 2, on fait apparaitre S_n (vert).

On a donc : $C_{n+1} = C_n + 2 \times S_n + (n+1)$.

c.

De la 2.a, on trouve que $C_{n+1} - C_n = n^2 + 2n + 1$

De la 2.b, $C_{n+1} - C_n = 2 \times S_n + (n+1)$.

Donc, $2 \times S_n + (n+1) = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 2 \times S_n = (n+1)^2 - (n+1) \Leftrightarrow 2 \times S_n = (n+1)(n+1-1) \Leftrightarrow 2 \times S_n = (n+1)n \Leftrightarrow S_n = \frac{(n+1)n}{2}$.

3. a. Soit k un entier naturel. Développer $(k+1)^3$.

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

3. b. En s'inspirant de la méthode décrite au 2., déterminer une formule permettant, pour tout entier $n \geq 2$, de calculer rapidement la somme $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Appelons $T_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

$$T_{n+1} - T_n = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$T_{n+1} = (0+1)^3 + (1+1)^3 + (2+1)^3 + (3+1)^3 + \cdots + \left((n-1)+1\right)^3 + (n+1)^3 = 0^3 + 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 + 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 + 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 + \cdots + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = T_n + 3C_n + 3S_n + (n+1)$.

On a donc : $T_{n+1} = T_n + 3C_n + 3S_n + (n+1)$ donc $T_{n+1} - T_n = 3C_n + 3S_n + (n+1) = (n+1)^3$

Ce qui donne : $C_n = \frac{(n+1)^3 - 3S_n - (n+1)}{3} = \frac{(n+1)^3 - 3\frac{(n+1)n}{2} - (n+1)}{3} = \frac{(n+1)((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1)}{3} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1)}{3} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n - \frac{3n}{2})}{3} = \frac{(n+1)n(n+2-\frac{3}{2})}{3} = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ ouffff ;)

4. La même méthode permet de démontrer les résultats suivants, que l'on admettra : pour tout entier $n \geq 2$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ et $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

En déduire un calcul donnant l'approximation du volume de la trompette obtenue en utilisant 160 cylindres.

Pour notre volume, on avait la formule suivante :

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_{160} = \frac{\pi}{160^5}(1 + 2^4 + \cdots + n^4) = \frac{\pi}{160^5}\left(\frac{1}{5}160^5 + \frac{1}{2}160^4 + \frac{1}{3}160^3 - \frac{1}{30}160\right) \approx 0{,}638$$