BTS SIO – 2

Prépa BTS - Révision

Matrice / Congruence / Conversion

Rappel :

Congruence

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On dit que deux entiers naturels a et b sont congrus modulo n si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On écrit alors : $a \equiv b[n]$ *ou* $b \equiv a[n]$

Exemples :

- $21 \equiv 16[5]$
- $13 \equiv$ ___________[3]
- $16 \equiv$ ___________[5]
- Pour tout entier naturel a, a ≡ 0[2] si et seulement si a est ....

Propriétés

- Pour tout entier naturel *a* et tout entier naturel *n* ≥ 2, on a que :
  a ≡ 0[n] si et seulement si a est multiple de n.

- Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$, et n un entier naturel non nul.
  a est congru à b modulo n si et seulement si $a - b$ est un multiple de n.

- Soient a, b, c et d des entiers naturels et n un entier naturel non nul.

Si $a \equiv b[n]$ *et* $c \equiv d[n]$ alors :

- $a + c \equiv b + d[n]$
- $a - c \equiv b - d[n]$
- $pa \equiv pb[n]$ pour tout entier naturel p
- $a \times c \equiv b \times d[n]$
- $a^p \equiv b^p[n]$ pour tout entier naturel p

Exercice :
Compléter les égalités de congruence suivantes avec le plus petit entier naturel possible :
a) 5917 ≡ ...... [2] b) 1724 ≡ ...... [10] c) 125 ≡ ...... [7]

Conversion

De la base 16 à la base 10

$$(3C8)_{16} = 3 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 968$$

Exercice:

Écrire ces nombres dans la base 10 :

$(135)_{16} =$

$(4C)_{16} =$

$(F2)_{16} =$

De la base 10 vers la base 16

Méthode 1 : Par divisions successives

On va effectuer des divisions euclidiennes par 16 de notre nombre à convertir puis des quotients.

Base 16	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
Base 16	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Base 10	8	9	10	11	12	13	14	15

Exemple :

Convertissons $(248)_{10}$ vers la base 16 :

BTS

Question 1 :

Soit *a* et *b* des entiers naturels tels que $a \equiv 2[7]$ et $b \equiv 4[7]$.

À quelle valeur $(a+b)^{2022}$ est-il congru modulo 7?

Question 2 :

Soit *n* un entier relatif.

On considère l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -22 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}$.

Elle est vérifiée pour :

A : $n = -3$ **B:** n=4 **C:** n=−6 **D:** n=5

Codage de Hill

Dans le tableau suivant, on associe à chaque lettre de l'alphabet, en majuscule, son rang dans l'alphabet en commençant par 0.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La procédure pour chiffrer un message est décrite dans l'exemple ci-dessous :

Pour chiffrer le message « CARTES » avec la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- On remplace chaque lettre par son rang : C par 2, A par 0, R par 17, T par 19, E par 4 et S par 18.
- On obtient ainsi une matrice à 3 colonnes :$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 17 \\ 19 & 4 & 18 \end{pmatrix}$.
- On effectue le produit matriciel $M \times W$; on a $M \times W = \begin{pmatrix} 36 & 72 & 36 \\ 63 & 114 & 67 \end{pmatrix}$.
- On remplace chaque coefficient de la matrice $M \times W$ par le reste de sa division euclidienne par 26. Ce qui revient à trouver, pour chaque coefficient, l'unique entier compris entre 0 et 25 qui lui est congru modulo 26.
  On a : $36 \equiv 10\ [26]$, $72 \equiv 20\ [26]$, $63 \equiv 11\ [26]$, $114 \equiv 10\ [26]$ et $67 \equiv 15\ [26]$.
- Ainsi on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 11 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.
- On remplace chaque nouveau coefficient de $M \times W$ par la lettre correspondante ;
- On obtient donc : $\begin{pmatrix} K & U & K \\ L & K & P \end{pmatrix}$.
- Le message codé est donc : « KUKLKP ».

Partie A

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot « BUR » en « XMR ».

1. On considère le message «JUA». Déterminer le message chiffré.
2. Que peut-on remarquer ?
3. Que pensez-vous de cette clé de chiffrement ?

Partie B

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 11 & n & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, où n est un entier naturel compris entre 15 et 25.

1. Vérifier que $6n+36 \equiv 12 \pmod{26}$.
2. Déterminer la valeur de l'entier naturel n.

RGB

Dans le modèle RGB (Red, Green, Blue), datant de 1931, la couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentées par la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, où R représente l'intensité de la composante rouge, G l'intensité de la composante verte et B l'intensité de la composante bleue. L'intensité de chaque composante est, dans le système décimal, un entier compris entre 0 et 255 : 0 désigne l'absence de celle-ci et 255 désigne l'intensité maximale de celle-ci.

Partie A - Codage de couleurs

La couleur « saumon » est codée par $\begin{pmatrix} 248 \\ 142 \\ 85 \end{pmatrix}$ en décimal, l'intensité du rouge est donc 248, celle du vert est 142 et celle du bleu est 85.

Dans certains logiciels comme Photoshop par exemple, les couleurs sont codées par 3 nombres hexadécimaux à deux chiffres représentant les valeurs de Rouge, Vert et Bleu. En hexadécimal, cette couleur « saumon » est codée (*F*8 ; 8*E* ; 55) que l'on notera par la matrice $\begin{pmatrix} F8 \\ 8E \\ 55 \end{pmatrix}$.

1. La couleur «vert tilleul» est codée en écriture décimale par $\begin{pmatrix} 165 \\ 209 \\ 82 \end{pmatrix}$.

   Déterminer son codage en hexadécimal, on détaillera la démarche pour la valeur 165.

2. La couleur «mauve» est codée en hexadécimal par $\begin{pmatrix} D4 \\ 73 \\ D4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer son codage en hexadécimal, on détaillera la démarche pour la valeur 165.

3. Combien de couleurs différentes peut-on représenter avec ce mode de représentation ? Combien de bits utilise ce codage ?

Partie B - De la lumière vers l'œil.

La rétine d'un œil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les bâtonnets.

Les bâtonnets sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite « scotopique ») et vision à niveaux de gris) et ne perçoivent pas les couleurs.

Ils mesurent l'intensité de la lumière visible. Les cônes sont responsables de la vision diurne colorée.

La vision des couleurs n'est pas toutefois directe, elle est envoyée au cerveau au moyen d'un signal $S = \begin{pmatrix} I \\ l \\ C \end{pmatrix}$.

- L'intensité *i* de la lumière est $i = \frac{1}{3}(R + G + B)$;
- L'intensité *l* des ondes longues est $l = R - G$;
- L'intensité *c* des ondes courtes est $c = B - \frac{R+G}{2}$.

Par exemple, pour la couleur « vert tilleul » codée en décimal par $\begin{pmatrix} 165 \\ 209 \\ 82 \end{pmatrix}$, l'intensité *i* de la lumière est $= \frac{1}{3}(165 + 209 + 82) \ = 152$, l'intensité *l* des ondes longues est $l = 165 - 209 = -44$ et l'intensité *c* des ondes courtes est $c = 82 - \frac{165+209}{2} = -105$.

On note les matrices : $C = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

1. a. Donner une égalité reliant les matrices *S*, *C* et *M*.
b. Calculer les différentes intensités *i*, *l* et *c* du signal lorsque *R*=150, *G*=90 et *B*=210.

2. Soit *N* la matrice définie par : $N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit $N \times M$.
b. Que peut-on en déduire pour les matrices *N* et *M* ?

3. a. Prouver que si $M \times C = S$ alors $C = N \times S$.

b. Le cerveau reçoit comme signal : *i*=120;*l*=100et*c*=−90.
Quelles sont les intensités *R*, *G* et *B* de la lumière reçue par l'œil?

Correction :
Question 1 :

Soit a et b des entiers naturels tels que $a \equiv 2\,[7]$ et $b \equiv 4\,[7]$.

À quelle valeur $(a+b)^{2022}$ est-il congru modulo 7 ?

A : 1 **B :** : 6 **C :** 4 **D :** -4

$a \equiv 2\,[7]$ et $b \equiv 4\,[7]$ donc $a+b \equiv 2+4\,[7]$ c'est-à-dire $a+b \equiv 6\,[7]$.
Or $6 \equiv -1\,[7]$ donc $a+b \equiv -1\,[7]$.
On en déduit que $(a+b)^{2022} \equiv (-1)^{2022}\,[7]$ donc que $(a+b)^{2022} \equiv 1\,[7]$.

Réponse A

Question 2 :

Soit n un entier relatif.

On considère l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -22 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}$.

Elle est vérifiée pour :

A : $n=-3$ **B :** $n=4$ **C :** $n=-6$ **D :** $n=5$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2+4n \\ 3 & -12+n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 2+4n \\ 3 & -12+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -22 \\ 3 & -18 \end{pmatrix} \iff n=-6$$

Réponse C

Codage de Hill

Partie A

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\2&4&2\end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot « BUR » en « XMR ».

1. Le message « JUA » correspond aux nombres 9 – 20 – 0, donc à la matrice $M = \begin{pmatrix}9 & 20 & 0\end{pmatrix}$.
   $M \times W = \begin{pmatrix}49 & 38 & 69\end{pmatrix}$ ce qui donne pour restes modulo 26 : $\begin{pmatrix}23 & 12 & 17\end{pmatrix}$.
   Cette matrice correspond à « XMR » donc le message chiffré est « XMR ».
2. Les deux séquences « BUR » et « JUA » correspondent au même message chiffré « XMR » ; la clé de chiffrement n'est donc pas bonne.

Partie B

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix}11&n&14\\7&9&21\\17&0&3\end{pmatrix}$, où n est un entier naturel compris entre 15 et 25.

On sait que cette clé permet de chiffrer le mot « GEL » en « VMT ».

1. Le mot « GEL » correspond aux nombres 6 – 4 – 11 donc à la matrice $M = \begin{pmatrix}6 & 4 & 11\end{pmatrix}$.
   $M \times W = \begin{pmatrix}281 & 6n+36 & 201\end{pmatrix}$
   Le mot « VMT » correspond à 21 – 12 – 19 soit à la matrice $\begin{pmatrix}21 & 12 & 19\end{pmatrix}$.

   - $281 = 10 \times 26 + 21$ donc 281 correspond au nombre 21 donc à la lettre V ;
   - $201 = 7 \times 26 + 19$ donc 201 correspond au nombre 19 donc à la lettre T ;

   Pour que « GEL » se code en « VMT », il faut donc que $6n + 36$ corresponde à la lettre M, donc corresponde au nombre 12 ; il faut donc que $6n + 36 \equiv 12 \pmod{26}$.
2. On cherche tous les restes de la division de $6n + 36$ dans la division par 26, pour n variant entre 15 et 25 :

- $165 = 10 \times 16 + 5 = \overline{\text{A5}}^{16}$
- $209 = 13 \times 16 + 5 = \overline{\text{D1}}^{16}$
- $82 = 5 \times 16 + 2 = \overline{52}^{16}$

Donc la couleur « vert tilleul » est codée en hexadécimal par $\begin{pmatrix} \text{A5} \\ \text{D1} \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. La couleur « mauve » est codée en hexadécimal par $\begin{pmatrix} \text{D4} \\ 73 \\ \text{D4} \end{pmatrix}$.

- $\overline{\text{D4}}^{16} = 13 \times 16 + 4 = 212$
- $\overline{73}^{16} = 7 \times 16 + 3 = 115$

Donc la couleur « mauve » est codée en écriture décimale par $\begin{pmatrix} 212 \\ 115 \\ 212 \end{pmatrix}$.

3. Il y a 256 valeurs possibles pour le rouge (de 0 à 255), 256 pour le vert, et 256 pour le bleu, ce qui fait en tout $256^3 = 16\,777\,216$ couleurs possibles.

Il faut 8 bits pour représenter un nombre décimal compris entre $0 = \overline{00000000}^2$ et $255 = \overline{11111111}^2$. Ce codage utilise donc $3 \times 8 = 24$ bits.

Partie B - De la lumière vers l'œil.

La rétine d'un œil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les bâtonnets. Les bâtonnets sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite « scotopique ») et vision à niveaux de gris) et ne perçoivent pas les couleurs. Ils mesurent l'intensité de la lumière visible. Les cônes sont responsables de la vision diurne colorée. La vision des couleurs n'est pas toutefois directe, elle est envoyée au cerveau au moyen d'un signal $S = \begin{pmatrix} i \\ l \\ c \end{pmatrix}$.

- L'intensité i de la lumière est $i = \dfrac{1}{3}(R + G + B)$;
- L'intensité l des ondes longues est $l = R - G$;
- L'intensité c des ondes courtes est $c = B - \dfrac{R+G}{2}$.

On note les matrices : $C = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** $M \times C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}R + \frac{1}{3}G + \frac{1}{3}B \\ R - G + 0 \\ -\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}G + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(R+G+B) \\ R - G \\ B - \dfrac{R+G}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ l \\ c \end{pmatrix} = S$

   Donc $M \times C = S$.

   b. Lorsque $R = 150$, $G = 90$ et $B = 210$, on a $C = \begin{pmatrix} 150 \\ 90 \\ 210 \end{pmatrix}$.