BTS SIO – 2

Prépa BTS - Révision

Graphe / Logique (Tableau de Karnaugh)

Rappel :

Tableaux de Karnaugh

Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter facilement des expressions Booléennes. Dans le cadre du programme, on se limitera à deux ou trois variables.

III.1. Cas de 2 variables

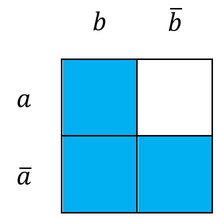
Le tableau de Karnaugh comprend 4 cases, correspondant aux 4 produits ab, $a\bar{b}$, $\bar{a}b$ et $\bar{a}\bar{b}$.

ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

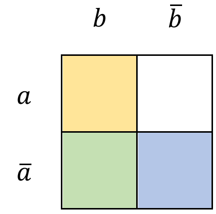
	b	$\bar{b}$
a		
$\bar{a}$		

La première ligne correspond à $ab + a\bar{b} = a(b+\bar{b}) = a.1 = a$, la seconde ligne correspond à $\bar{a}$.
De même la première colonne est b et la seconde est $\bar{b}$.
Pour représenter des expressions dans un tableau de Karnaugh, on colore les cases concernées par l'expression.

Exemple :
Pour représenter l'expression $\bar{a} + b$, on colore la ligne $\bar{a}$ et la colonne b :



Utilité :
On peut ainsi simplifier des expressions car à ce tableau.
Simplifions l'expression suivante : $E = b\,\bar{a} + b\,a + \bar{a}\,\bar{b}$



Ainsi, on voit que $E = \bar{a} + b$ et aussi que $non(E) = \bar{E} = a\bar{b}$

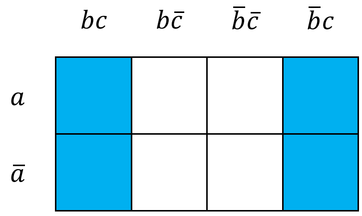
III.2. Cas de 3 variables

Le tableau de Karnaugh comprend alors 8 cases, correspondant aux 8 produits : $abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

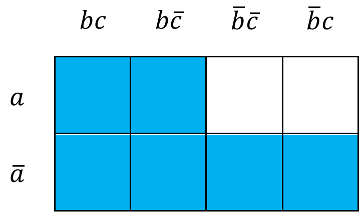
abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

Exemples :
Pour représenter l'expression c, on colorie les colonnes où l'on retrouve c :



Pour l’expression $\bar{a}+b$, on réunit la ligne $\bar{a}$ et les colonnes b (Rappel : + équivaut à une réunion).



Exercices :

1. Représenter dans un tableau de Karnaugh l’expression suivante et la simplifier : $F = s \bullet r + \bar{s} \bullet m + m \bullet \bar{r} + \bar{m} \bullet \bar{r} \bullet s$

	rm	$r\bar{m}$	$\bar{r}\bar{m}$	$\bar{r}m$
s				
$\bar{s}$				

2. Donner l’expression simplifier de F et $\bar{F}$.

3.a. Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :
$A = a\bar{c} + \bar{b}c + abc$ et $B = \bar{a}b + \bar{b}c + a\bar{c}$

b. Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

BTS

Exercice 1

Partie A

On considère le graphe orienté G comportant 3 sommets notés A, B et C dont la matrice d'adjacence est P, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dessiner une représentation du graphe G.
2. a. Calculer la matrice P^2.
b. Combien de chemins de longueur 2 ont pour origine B ?
3. Déterminer la matrice d'adjacence $\hat{P}$ et le graphe de la fermeture transitive de G

Partie B

Dans un graphe orienté, on définit :
- le degré entrant d'un sommet comme étant le nombre d'arcs menant à ce sommet.
- le degré sortant d'un sommet comme étant le nombre d'arcs issus de ce sommet.

1. a. Calculer le degré entrant du sommet C du graphe G défini dans la partie A.
b. Calculer le degré sortant du sommet C du graphe G défini dans la partie A.
2. On étudie dans cette question les graphes orientés à trois sommets numérotés de 1 à 3.
On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où *Degré_sortant* désigne une fonction de paramètres M et s, M étant une matrice à 3 lignes et 3 colonnes et s un entier compris entre 1 et 3. Le coefficient de la matrice M situé ligne i colonne j est noté m_{ij}.

```
Fonction Degré_sortant (M,s)
        deg ← 0
        Pour j allant de 1 à 3 Faire
                Si msj ......Faire
                        ......
                Fin de Si
        Fin de Pour
Retourner deg
```

Compléter cet algorithme pour que la fonction renvoie le degré sortant du sommet numéroté s dans un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

Exercice 2 (sans Graphe)

Une entreprise décide de mettre en place une authentification à plusieurs étapes permettant à ses employés d'accéder aux services en ligne qu'elle propose.

Partie A

La première authentification consiste à utiliser un mot de passe.
À la première connexion, l'utilisateur doit créer un mot de passe de 8 à 16 caractères.
Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet ou des chiffres ou des caractères spéciaux (?,&, etc.).
Pour être valide, un mot de passe doit remplir au moins l'une des trois conditions suivantes :
- il contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux;

- il contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres;
- il contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres.

1. Les mots de passe suivants sont-ils valides ? Justifier.

ABCDABCD ?# STU27ABCABCDE&

On définit les variables booléennes a, b et c de la manière suivante :

- a lorsque le mot de passe contient au moins trois chiffres, $\bar{a}$ sinon;
- b lorsque le mot de passe contient au moins deux caractères spéciaux, $\bar{b}$ sinon;
- c lorsque le mot de passe contient au moins dix lettres, $\bar{c}$ sinon.

2. a. On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.
Traduire chacune des conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a, b et c, puis en déduire une expression de E.
b. Représenter E dans un tableau de Karnaugh, puis en déduire une expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes.
c. Traduire par une phrase l'expression simplifiée de E.
3. Déterminer l'expression booléenne $\bar{E}$ négation de E.

Partie B

Pour la seconde authentification, le serveur de l'entreprise envoie à l'utilisateur un mot de passe codé qu'il devra décoder.
Le serveur de l'entreprise code un mot de passe de la façon suivante :
- à chaque lettre de l'alphabet, on associe son rang x selon le tableau ci-dessous :

Lettre	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
Rang	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- on fixe une clé (a ; b), où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 25;
- on calcule le reste y de la division de ax + b par 26; on détermine ainsi le plus petit entier naturel y vérifiant $y \equiv ax + b\ [26]$;
- on cherche ensuite la lettre de l'alphabet dont le rang est y ;
- cette lettre code la lettre donnée au départ.

1. Le serveur de l'entreprise utilise la clé (9; 15).
a. Montrer que la lettre C est codée par la lettre H.
b. Par quelle lettre est codée la lettre E ?
2. L'utilisateur veut décoder la lettre V associée à l'entier y = 21. Pour cela il doit déterminer le plus petit entier naturel x vérifiant $21 \equiv 9x + 15\ [26]$.
a. Déterminer un entier c vérifiant $9 \times c \equiv 1\ [26]$.
b. Montrer que si $21 \equiv 9x + 15\ [26]$ alors $x \equiv 18\ [26]$.
c. Décoder la lettre V.

Exercice 3

Partie A

Un professeur de lycée souhaite aménager une salle de cours en salle vidéo pour l'option cinéma. Le professeur, responsable du projet, définit les tâches à réaliser avec leur durée. Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en semaines	Tâches précédentes
Acceptation du projet par l'administration	A	2	---
Acceptation du projet par la région	B	3	---
Préparation de la salle.	C	6	A
Câblage électrique de la salle.	D	7	C, E
Choix du matériel vidéo.	E	4	A, B
Commande du matériel vidéo.	F	6	E
Installation du matériel vidéo.	G	2	D, F
Test et réglage du matériel vidéo	H	1	G

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible.

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent. Les sommets A, B, C, D, E, F, G et H représentent les repères des tâches à réaliser.

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.
2. Donner le tableau des successeurs de chacun des sommets du graphe.
3. Construire le graphe d'ordonnancement du projet (Méthode P. E. R. T. ou M. P. M.).
4. Déterminer, pour chaque tâche, les dates au plus tôt et au plus tard.
5. En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
6. La tâche E prend une semaine de retard. Quelle est l'incidence de ce retard sur la durée totale de ce projet ? Justifier.

Partie B

Le gestionnaire du lycée considère que le projet est envisageable lorsqu'il satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- Le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et est de fabrication française.
- Le matériel vidéo n'est pas de fabrication française et il coûte moins de 500 euros;
- Le matériel vidéo n'a pas été acheté dans un magasin local, est de fabrication française et a coûté moins de 500 euros. On définit les variables a, b, c de la façon suivante :
- a le matériel vidéo coûte moins de 500 euros et $\bar{a}$ le matériel vidéo coute 500 euros ou plus;
- b le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et $\bar{b}$ le matériel vidéo n'est pas acheté dans un magasin local.

- c le matériel vidéo est de fabrication française et $\bar{c}$ le matériel vidéo n'est pas de fabrication française.

1. Écrire une expression booléenne E traduisant que le projet est envisageable, à l'aide des variables booléennes a, b, c.
2. a. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, déterminer une écriture simplifiée de E à deux termes.
b. En déduire une interprétation simplifiée des conditions pour que le projet soit envisageable.
3. Dans le projet présenté, le matériel vidéo coûte plus de 500 euros, n'est pas de fabrication française mais sera acheté localement. Ce projet est-il envisageable ?

Exercice 4 : un problème de routage

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère un réseau de commutation de paquets constitués de 6 routeurs A, B, C, D, E et F. Chaque paquet reçu par l'un des routeurs doit être acheminé vers un autre routeur, jusqu'à atteindre sa destination finale. Dans le tableau ci-dessous, on a résumé les règles de routage d'un routeur à un autre routeur.

Peut transmettre à	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A			X	X	X	
B	X		X		X	X
C					X	
D						
E				X		X
F				X		

On considère le graphe simple orienté G constitué des sommets A, B, C, D, E et F. Les sommets représentent les routeurs. Si un sommet X peut transmettre un paquet vers un sommet Y alors on a l'arc X → Y.

1. a. Recopier et compléter le tableau des successeurs et des prédécesseurs du graphe G :

Sommets	**Prédécesseurs**	**Successeurs**
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe G, les sommets étant rangés par ordre alphabétique.

2. a. Calculer M^3.
b. Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D ?
3. a. Déterminer la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive du graphe G.
b. Que signifie le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de $\widehat{M}$?

4. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, en indiquer un.

Partie B

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1. a. Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres.

Déterminer le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet.

b. Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, quel nombre maximal d'adresses IPv4 peuvent être attribuées ?

Le routeur C de la partie A gère les connexions réseaux d'un parc informatique de 8 machines étiquetées de 1 à 8.

Le DHCP de ce routeur est paramétré de telle façon qu'il attribue une plage de 49 adresses IPv4 allant de 192.168.1.2 jusqu'à 192.168.1.50.

Les 8 machines sont identifiées grâce aux adresses IPv4 suivantes :

Étiquette de la machine	**Adresse IPv4 de la machine**
1	192.168.1.2
2	192.168.1.4
3	192.168.1.12
4	192.168.1.49
5	192.168.1.48
6	192.168.1.50
7	192.168.1.5
8	192.168.1.6

2. Écrire le premier octet commun aux adresses de ces machines sous forme binaire puis sous forme hexadécimale.

Exercice 5 :

Le spam, courriel indésirable ou pourriel, est une communication électronique non sollicitée, en premier lieu via le courrier électronique. Il s'agit en général d'envois en grande quantité effectués à des fins publicitaires. Un étudiant en BTS SIO a développé un logiciel anti spam. Le filtre mis en place par l'étudiant se base sur les trois variables booléennes suivantes :

- a l'objet du message contient au moins un terme douteux (gratuit, offre, promotion, gagner ...), $\bar{a}$ l'objet du message ne contient aucun terme douteux;
- b le corps du message contient des images ou des hyperliens, $\bar{b}$ le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens;
- c les messages de l'expéditeur sont rarement lus, $\bar{c}$ les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment.

Avec ce logiciel, un courriel est considéré comme indésirable si :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens;

ou

- l'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus;

ou

- les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens;

1. Traduire chaque condition par une expression booléenne en fonction des variables a, b et c puis déterminer l'expression booléenne E traduisant les conditions pour qu'un courriel soit considéré comme indésirable.

Pour la suite de l'exercice, on admet que $E = ab + c\bar{a} + \bar{b}c$.

2. a. Présenter E dans une table de Karnaugh.

b. Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment, peut-il être considéré comme indésirable ? Justifier.

c. En utilisant la table de Karnaugh, déduire l'expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un est éventuellement un produit.

3. Traduire, en français, la règle pour considérer un courriel comme indésirable.

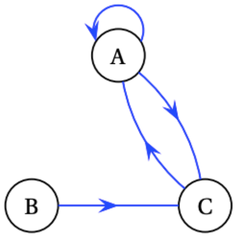
4. Donner une expression de $\bar{E}$.

Correction

Exercice 1

PA

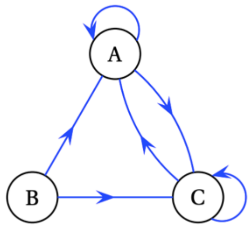
1.



2\. a. $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b\. La matrice $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne le nombre de chemins de longueur 2; il n'y en a qu'un partant de B, et il va vers A : c'est le chemin B - C – A

3\. La matrice de fermeture transitive de ce graphe est : $\hat{P} = P \oplus P^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



PB

Dans un graphe orienté, on définit :

- le degré entrant d'un sommet comme étant le nombre d'arcs menant à ce sommet.
- le degré sortant d'un sommet comme étant le nombre d'arcs issus de ce sommet.

1\. a. Le degré entrant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 2; c'est la somme des nombres situés sur la 3e colonne de P.

b\. Le degré sortant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 1 : c'est la somme des nombres situés sur la 3e ligne de P.

2\. On étudie dans cette question les graphes orientés à trois sommets numérotés de 1 à 3.

On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où Degré_sortant désigne une fonction de paramètres M et s, M étant une matrice à 3 lignes et 3 colonnes et s un entier compris entre 1 et 3.

Le coefficient de la matrice M situé ligne i colonne j est noté m_{ij} .

On complète cet algorithme pour que la fonction renvoie le degré sortant du sommet numéroté s dans un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

```
Fonction Degré_sortant (M,s)
        deg ← 0
        Pour j allant de 1 à 3 Faire
                Si m_sj > 0 Faire
                        deg ← deg+1
                Fin de Si
        Fin de Pour
Retourner deg
```

Exercice 2

1. • Le mot de passe ABCDABCD ?# contient deux caractères spéciaux mais il ne contient ni trois chiffres, ni au moins dix lettres; il n'est donc pas valide.

• Le mot de passe STU27ABCABCDE& contient deux caractères spéciaux et onze lettres donc il est valide.

2. a. On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.

• Le mot de passe « contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux » se traduit en $a.b$; • Le « ou » se traduit en +;

• Le mot de passe « contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\bar{a}.b.c$;

• Le « ou » se traduit en +;

• Le mot de passe « contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\bar{b}.c$. Donc $E = a.b + \bar{a}.b.c + \bar{b}.c$.

b. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

Donc $E = a.b + c$.

c. L'expression simplifiée de E est « le mot de passe contient au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux, ou au moins dix lettres ».

3. D'après le tableau on trouve : $\bar{E} = \bar{a}.\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

PB

1. Le serveur de l'entreprise utilise la clé (9;15).

a. La lettre C a pour rang x = 2. Donc ax +b = 9×2+15 = 33 qui a pour reste y = 7 dans la division par 26. Le rang 7 correspond à la lettre H donc C est codée H.

b. La lettre E a pour rang x = 4. Donc ax +b = 9×4+15 = 51 qui a pour reste y = 25 dans la division par 26. Le rang 25 correspond à la lettre Z donc E est codée Z.

2. L'utilisateur veut décoder la lettre V associée à l'entier y = 21.

Pour cela il doit déterminer le plus petit entier naturel x vérifiant 21 ≡ 9x +15 [26].

a. 9×3 = 27 ≡ 1 [27].

b. Si 21 ≡ 9x +15 [26] alors 3×21 ≡ 3×(9x +15) [26] soit 63 ≡ 27x +45 [26] qui donne 18 ≡ 27x [26] ou encore, puisque 27 ≡ 1 [26], on a 18 ≡ x [26].

Donc 21 ≡ 9x +15 [26] alors x ≡ 18 [26].

c. La lettre V correspond au rang y = 21.

On cherche x tel que 21 ≡ 9x + 15 [26]. D'après la question précédente, on obtient x = 18, qui est le rang de la lettre S. Donc la lettre V se décode en S.

Exercice 3

PA

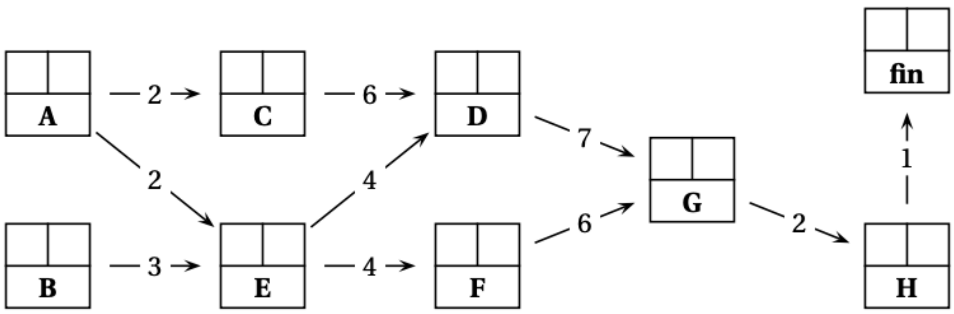
1.

Niveaux	0	1	2	3	4
Sommets	**A , B**	**C, E**	**D, F**	**G**	**H**

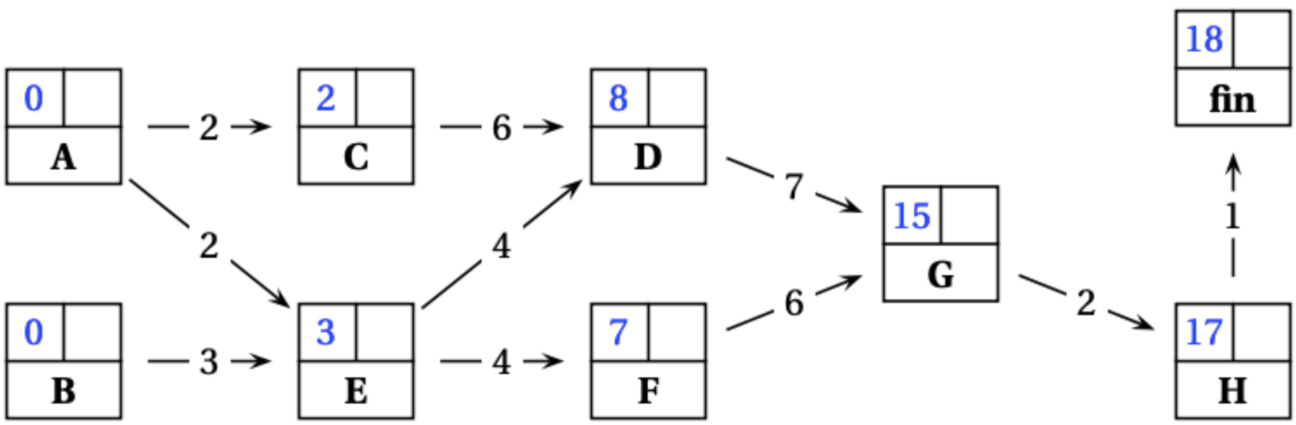
2.

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A	---	C, E
B	---	E
C	A	D
D	C, E	G
E	A, B	D, F
F	E	G
G	D, F	H
H	G	---

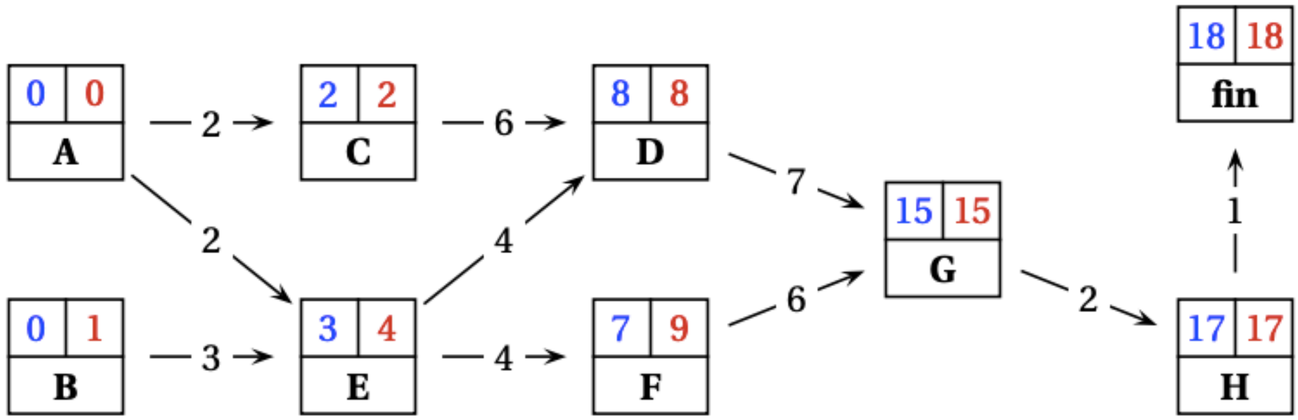
3. On construit par étapes le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M.); pour cela on construit le graphe par niveaux en rajoutant une tâche fictive « fin ».



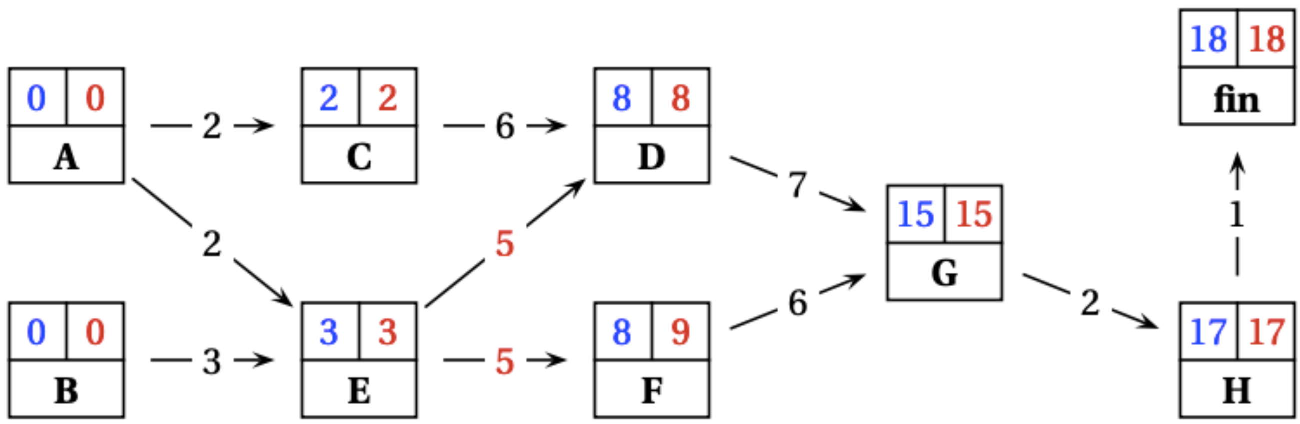
4. Pour déterminer pour chaque tâche les « dates au plus tôt », on traite les sommets par niveaux en partant du début. Puis pour chaque sommet, on note la date qui est la longueur du plus long chemin depuis le début.



Ce graphe donne la durée minimale du projet qui est de 18 semaines. Pour déterminer pour chaque tâche les « dates au plus tard », on traite les sommets par niveaux en partant de la fin et en marquant 18 pour le sommet « fin ». La date « au plus tard » d'une tâche s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée. S'il y a plusieurs successeurs, on garde la date la plus petite.



5. Le chemin critique passe par les sommets pour lesquels les dates « au plus tôt » et « au plus tard » coïncident. Le chemin critique est donc : A $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H $\longrightarrow$ fin.
La durée minimale de réalisation du projet est de 18 semaines.
6. La tâche E prend une semaine de retard. La tâche E n'est pas dans le chemin critique; de plus il y a une semaine de décalage entre la date « au plus tôt » et la date « au plus tard » de E.
Donc la semaine de retard de E n'aura aucune incidence sur la durée totale de ce projet.
On peut également refaire le graphe d'ordonnancement en considérant que la tâche E se réalise en 5 semaines et plus en 4 semaines.



On arrive heureusement à la même conclusion.

PB
On écrit une expression booléenne E traduisant que le projet est envisageable, à l'aide des variables booléennes a, b, c.

- Le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et est de fabrication française correspond à $b.c$.
- Le « ou » se traduit par +.

- Le matériel vidéo n'est pas de fabrication française et il coûte moins de 500 euros correspond à $a.\bar{c}$.
- Le « ou » se traduit par +.
- Le matériel vidéo n'a pas été acheté dans un magasin local, est de fabrication française et a coûté moins de 500 euros correspond à $a.\bar{b}.c$.

Donc : $E = b.c + a.\bar{c} + a.\bar{b}.c$.

2. a. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.
$E = b.c + a.\bar{c} + a.\bar{b}.c$

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

On en déduit : $E = a + bc$.

b. Le projet est envisageable lorsqu'il satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :
- le matériel vidéo coûte moins de 500 euros (qui correspond à a);
- le matériel vidéo est acheté dans un magasin local, et il est de fabrication française (qui correspond à $b.c$).

3. Dans le projet présenté, le matériel vidéo coûte plus de 500 euros, n'est pas de fabrication française mais sera acheté localement.
Cela correspond à $\bar{a}.\bar{c}.b$ soit $\bar{a}.b.\bar{c}$. On place, au moyen d'une croix rouge, cet événement dans la table de Karnaugh représentant E :

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$		X		

Pas possible

Exercice 4

PA

1.a.

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A	B	C, D, E
B	---	A, C, E, F
C	A, B	E
D	A, E, F	---
E	A, B, C	D, F
F	B, E	D

b.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.a.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet B (sommet nº 2) au sommet D (sommet nº 4) est le nombre de la matrice M^3 situé à l'intersection de la 2e ligne et de la 4e colonne; il s'agit du nombre 3 donc il y a 3 chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D.
Ce sont : B → A → E → D, B → C → E → D et B → E → F → D.

3. a. La matrice de fermeture transitive de ce graphe est une matrice carrée d'ordre 6; on met un 1 à l'intersection de la ligne correspondant au sommet X et de la colonne correspondant au sommet Y s'il existe au moins un chemin allant du sommet X au sommet Y.
Sinon on met un 0. Le graphe G contient 6 sommets donc la matrice de fermeture transitive est $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} \oplus M^{[5]} \oplus M^{[6]}$.

On a : $N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 10 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où: $\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. La 3e ligne correspond au sommet C et la 6e colonne au sommet F; le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de $\widehat{M}$ signifie qu'il y a au moins un chemin allant de C vers F.
En regardant la matrice N, on peut même dire qu'il n'y en a qu'un seul : C → E → F.

4. Un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une fois et une seule par tous les sommets. Le chemin B → A → C → E → F → D est hamiltonien.

PB

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1. a. Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres. Le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet est le nombre décimal correspondant à $(11111111)_2$ soit $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = 1+2+4+8+16+32+64+128 = 255$.

b. Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, le nombre maximal d'adresses IPv4 qui peuvent être attribuées est $255^4 = 4\,228\,250\,625$.

2. Le premier octet commun s'écrit en décimal 192; on écrit 192 en binaire puis en hexadécimal.
$192 = 128+64 = 1\times2^7+1\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0 = (11000000)_2$
$192 = 12\times16+0\times16^0 = (C0)_{16}$.

Exercice 5 :

1. Le « et » se traduit en produit et le « ou » se traduit en somme. Donc :
- l'objet du message contient au moins un terme douteux (appelé a) avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens (appelé b), se traduit en $a.b$,
- ou, se traduit par +,
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux (appelé $\bar{a}$) et les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c), se traduit en $\bar{a}.c$;
- ou, se traduit par +,
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c) et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens (appelé $\bar{b}$), se traduit en $\bar{b}.c$.

Donc $E = a.b + \bar{a}.c + \bar{b}.c$.

2. a. On présente E dans une table de Karnaugh.

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

b. Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » (appelé a), et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment (appelé $\bar{c}$), est donc codé $a.\bar{c}$.
On le représente dans une table de Karnaugh :

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

En comparant avec la table de E, on peut ne pas considérer ce courriel comme indésirable.

c. En utilisant la table de Karnaugh, on déduit l'expression simplifiée de E.

$$E = c + a.b$$

3. La règle E pour considérer un courriel comme indésirable est :
- Les messages de l'expéditeur sont rarement lus (c), ou (+)

- l'objet du message contient au moins un terme douteux (a) et (×) le corps du message contient des images ou des hyperliens (b).

4. En partant de la table de Karnaugh de E, on écrit celle de $\bar{E}$ par complément : $\bar{E} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.
Ou par le calcul :

$$\bar{E} = \overline{c + a.b} = \bar{c}.\overline{a.b} = \bar{c}.\left(\bar{a} + \bar{b}\right) =$$