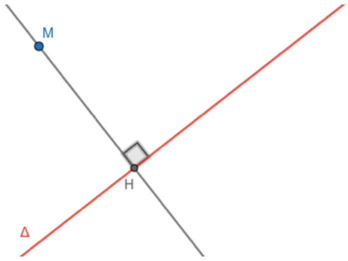
Chapitre II

Résoudre des problèmes de géométrie (1s)

Table des matières

I. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition :
Soit Δ une droite et M un point du plan. On appelle projeté orthogonal de M sur la droite Δ le point H intersection de Δ et de sa perpendiculaire passant par M.

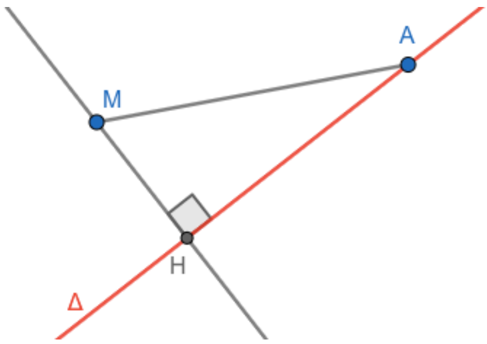


Propriété :
Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point le plus proche de la droite Δ .

Démonstration :
Soit Δ une droite du plan et M un point. On note H le projeté orthogonal de M sur Δ.

- *1er cas : Si $M \in \Delta$, alors M est confondu avec H, donc $MH = 0$.*
  Si A est un point distinct de M, alors $MA \neq 0$, donc $MA>0$, soit $MA>MH$.

- *2ème cas : Si $M \notin \Delta$.*
  Soit A un point distinct de H, on a $MA^2 = MH^2 + AH^2$ d'après le théorème de Pythagore.
  Comme H et A sont deux points distincts, $AH>0$, donc $AH^2>0$ et $MA^2>MH^2$, donc $MA>MH$ (car MA et MH sont 2 valeurs positives).



Dans tous les cas, H est le point de Δ le plus proche de M.

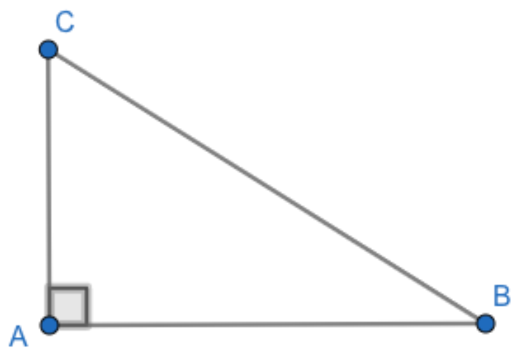
II. Trigonométrie du triangle rectangle

Définitions :
Soit ABC un triangle rectangle en A.

- Cosinus : $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$
- Sinus : $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$
- Tangente : $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}$

Ce qui donne pour le triangle ci-contre :

- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$



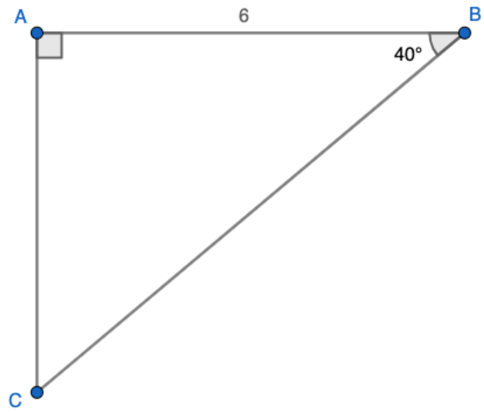
Propriété :
Dans un triangle rectangle, pout tout angle aigu de mesure α, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Démonstration :
Soit un triangle ABC rectangle en A (cf. figure ci-dessus). Soit α la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.
$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$.
Comme ABC est un triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
On en déduit que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.

Méthode :

- Calculer une longueur avec les formules de trigonométrie

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que AB=6 cm et $\widehat{ABC} = 40°$.
Calculer AC.



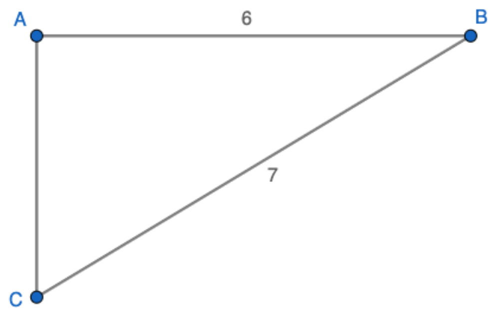
Correction :
Comme nous ne connaissons qu'un seul côté sur les 3 de ce triangle rectangle le théorème de Pythagore ne va pas nous servir.
Mais avec un angle et un côté, nous pouvons calculer n'importe quel autre côté de ce triangle rectangle grâce aux formules de trigonométrie.

Tout d'abord, il nous faut trouver la bonne formule.
Nous savons que BC est l'hypoténuse, que par rapport à l'angle que nous avons, AB est le côté adjacent, et nous voulons calculer le côté opposé à cet angle : AC.
Nous cherchons donc une formule avec côté adjacent et côté opposé... C'est le TANGENTE !

Rédaction :
Dans le triangle ABC rectangle en A :
$tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$
soit : $tan(40°) = \frac{AC}{6}$
Avec un produit en croix : $AC = 6 \times tan(40°) \approx 5{,}03\ cm$.

- Calculer un angle avec les formules de trigonométrie

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que AB=6 cm et BC=7 cm.
Calculer $\widehat{ABC}$.

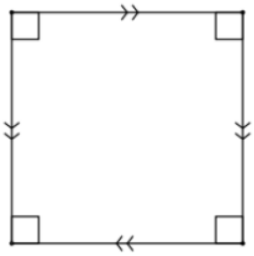
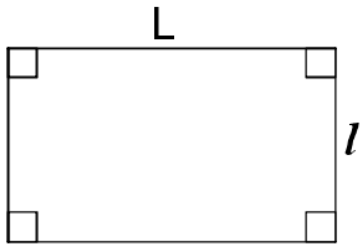
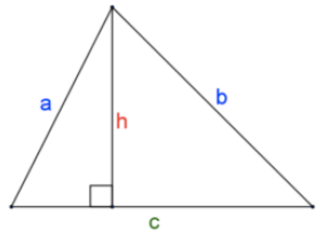
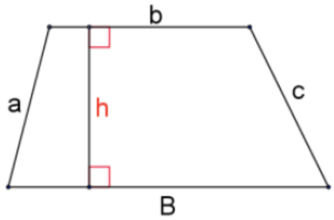
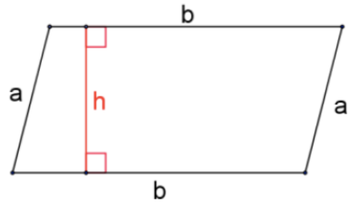
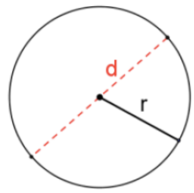


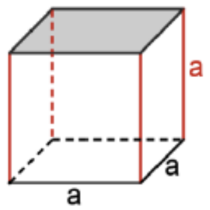
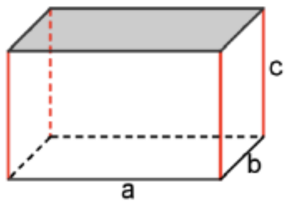
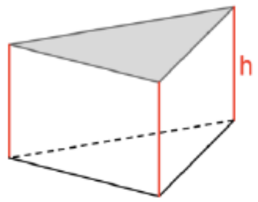
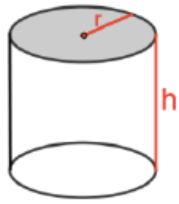
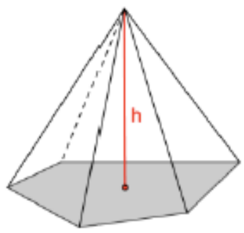
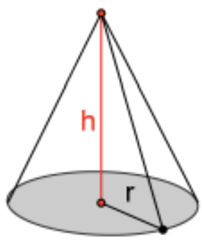
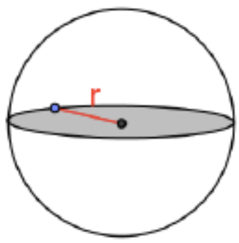
Correction :
Il nous faut d'abord trouver la formule utile pour notre cas :
BC est l'hypoténuse de ce triangle et nous le connaissons.
Par rapport à l'angle que nous cherchons, nous connaissons aussi AB qui est le côté adjacent.
Nous cherchons donc une formule avec côté adjacent et hypoténuse... C'est le COSINUS !

Rédaction :
Dans le triangle ABC rectangle en A :
$$cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
soit
$cos(\widehat{ABC}) = \frac{6}{7}$ *d'où :* $\widehat{ABC} = Arccos\left(\frac{6}{7}\right) \approx 31°$.
Remarque : sur votre calculatrice Arccos peut aussi se nommer cos^{-1}.

III. Rappels généraux de géométrie

1. Périmètres, aires et volumes

Périmètres et aires de figures planes		
Carré  P = 4xc A= c^2	Rectangle  P = 2 x (l + L) A = l x L	Triangle  P = a + b + c A = $\frac{c \times h}{2} = \frac{base \times hauteur}{2}$
Trapèze  P = a + b + c + B A = $\frac{(b+B)\times h}{2}$	Parallélogramme  P = 2 x (a + b) A = b x h	Cercle  P = $2\pi r = \pi d$ A = πr^2

Volumes de solides			
Cube  V = a^3	Pavé droit  V = a x b x c	Prisme  V = aire de la base x h	Cylindre  V = πr^2 x h
Pyramide  V = $\frac{aire\ de\ la\ base \times h}{3}$		Cône  V = $\frac{\pi r^2 \times h}{3}$	Boule  V = $\frac{4}{3}\pi r^3$

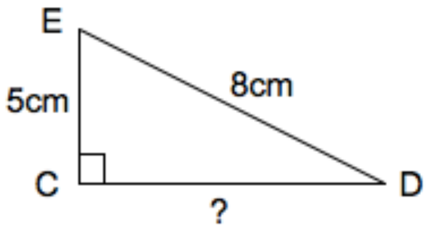
2. Théorèmes de Pythagore et Thalès

2.a. Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore :
Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Méthode : Appliquer le théorème de Pythagore
CDE est un triangle rectangle en C tel que CE = 5cm et ED = 8cm.
Calculer CD. Donner la valeur exacte et un arrondi au dixième de cm.

Correction
Je sais que le triangle CDE est rectangle en C.
*Son hypoténuse est le côté **ED**.*
J'utilise l'égalité de Pythagore, donc :



$\boldsymbol{ED}^2 = CE^2 + CD^2$
$8^2 = 5^2 + CD^2$
$64 = 25 + CD^2$
$CD^2 = 64 - 25$
$CD = \sqrt{39}$
$CD \approx 6{,}2cm.$

Méthode : Démontrer qu'un triangle est rectangle
Soit un triangle ABC tel que AB=12 cm, AC = 5cm et BC = 13cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

Correction :

- *D'une part :*

$BC^2 = 13^2 = 169$ *(On calcule « seul » le carré du plus grand côté : hypoténuse probable)*

- *D'autre part :*

$AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

On en déduit que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

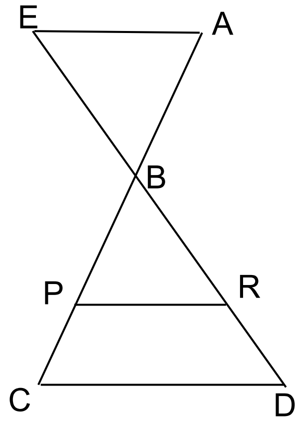
2.b. Théorème de Thalès

Théorème de Thalès :
Si (BM) et (CN) sont sécantes et en A et si (BC)//(MN) alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Les droites (EA) et (PR) sont parallèles.
On donne : EB = 2 cm, BD = 5 cm, PR = 4 cm, CD = 6 cm, AB=3 cm et BC=7,5 cm.
Calculer BR .
(AE) et (CD) sont-ils parallèles.

Correction :



1) On a :

- *B, R, D et B, P, C alignés dans le même ordre,*
- *(PR)//(CD),*

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{BD} = \frac{PR}{CD}$$

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{5} = \frac{4}{6}$$

$$BR = \frac{5 \times 4}{6} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3\ cm.$$

2)

- *D'une part,* $\frac{BE}{BD} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
- *D'autre part,* $\frac{BA}{BC} = \frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$

On a donc, $\frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$ *et A, B, D et A, B, C alignés dans le même ordre,*

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (EA) et (CD) sont alignés.