Chapitre V

Fonctions exponentielles de base a

Contenus

Les fonctions $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ comme modèle continu d'évolution relative constante :

– définition de la fonction $x \mapsto a^x$ pour x positif comme prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique (a^n) $n \in \mathbb{N}$; extension à $\mathbb{R}\_$ en posant $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

– sens de variation selon les valeurs de a ;

– allure de la courbe représentative selon les valeurs de a ;

– propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x \times a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^{nx} = (a^x)^n$n pour n entier relatif ;

– cas particulier de l'exposant $\frac{1}{n}$ pour calculer un taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives.

Capacités attendues

– Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a.

– Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.

– Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

Table des matières

I. Fonctions exponentielles de base a

Activité 1 p 42

I.1. Définition

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$. Elle est définie pour tout entier naturel n.

En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel strictement positif, on définit la fonction exponentielle de base a.

Définition :

La fonction $x \longmapsto a^x$ (se lit qui a x associe a^x) avec a réel strictement positif s'appelle la fonction exponentielle de base a.

Remarque :

$a^0 = 1$ *et* $a^1 = a$.

Exemple :

La fonction $x \longmapsto 1{,}75^x$ est la fonction exponentielle de base 1,75.

I.2. Sens de variation

I.2.a. Fonction $x \longmapsto a^x$

Propriétés :

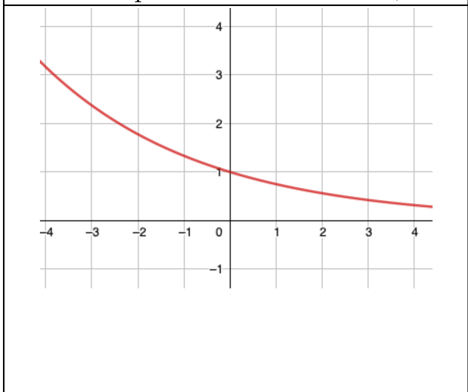
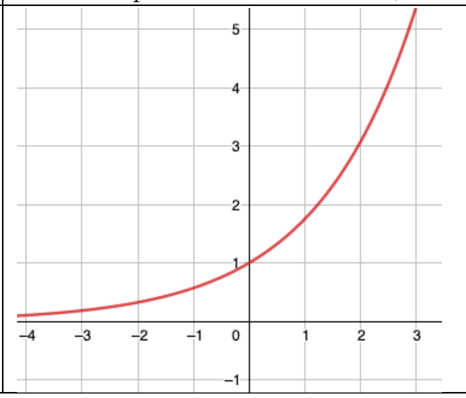
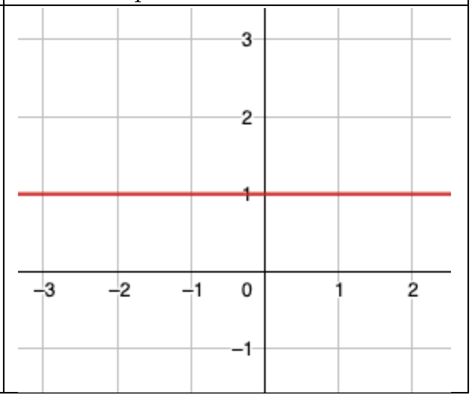
Soit la fonction exponentielle f de base a définie par $f(x) = a^x$ avec a un réel strictement positif.

Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 1$, alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 1$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

Courbe représentative de $x \longmapsto 0{,}75^x$	Courbe représentative de $x \longmapsto 1{,}75^x$	Courbe représentative de $x \longmapsto 1^x$
		

I.2.b. Fonction $x \longmapsto ka^x$

Propriétés :

Soit la fonction exponentielle f de base a définie par $f(x) = ka^x$ avec a un réel strictement positif et k un réel.

Si $k > 0$:

- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a > 1$, alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$:

- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a > 1$, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

I.3. Propriétés algébriques

Activité 2 p 42

Pour tout $a>0$, pour tout entier n, et pour tous réels x et y, on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^n = a^{nx} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Remarque :

Ce n'est rien d'autre que les formules que vous avez déjà vu pour les puissances…😉

Exemple :

$$2{,}75^{-1} \times 2{,}75^3 = 2{,}75^{-1+3} = 2{,}75^2$$
$$\frac{0{,}7^4}{0{,}7^6} = 0{,}7^{4-6} = 0{,}7^{-2}$$
$$(3^{6{,}1})^2 = 3^{6{,}1\times 2} = 3^{12{,}2}$$
$$4{,}8^{-2{,}1} = \frac{1}{4{,}8^{-2{,}1}}$$

II. Taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions

II.1. Rappel

Définition :

Le coefficient multiplicateur d'une hausse de a% est : $1 + \frac{a}{100}$.

Le coefficient multiplicateur d'une baisse de a% est : $1 - \frac{a}{100}$.

Exemple :

Le coefficient multiplicateur d'une hausse de 25% est : $1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$.

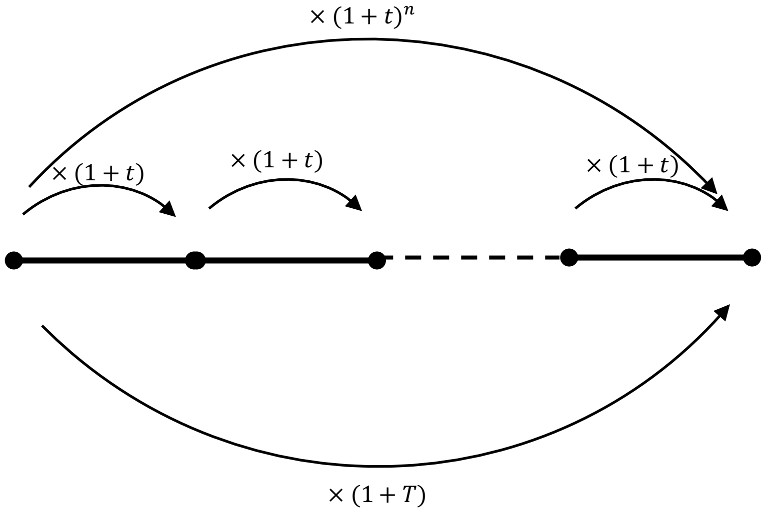
Le coefficient multiplicateur d'une baisse de 15% est : $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$.

Remarque :

Ces calculs doivent être automatiques ! Si besoin, entraînez-vous sur le site !!!

II.2. Définition

Nous allons étudier une évolution qui se déroule sur plusieurs années, et nous allons voir comment trouver le taux d'évolution moyen équivalent.



Définition :
Soit T le taux global correspondant à n évolutions successives identiques.
Le taux moyen correspondant à ces n évolution est le taux t tel que :

$$(1+t)^n = 1+T$$

Comment utiliser cette formule ?🤔

On va utiliser cette propriété :

Soit $a > 0$ et n un entier non nul ; $a^n = b$ équivaut à $a = b^{\frac{1}{n}}$.

Exemple :
Un prix a augmenté de 30% en 5 ans. On voudrait savoir à quelle augmentation annuelle cela correspond :
On cherche t tel que :

$$(1+t)^5 = 1 + \frac{30}{100}$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^5 = 1{,}3$$
$$\Leftrightarrow 1+t = 1{,}3^{\frac{1}{5}}$$
$$\Leftrightarrow t = 1{,}3^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}0538 \text{ } soit \text{ } 5{,}38\%$$

Cela veut dire que pour avoir une augmentation de 30% en 5 ans, il faut avoir une augmentation de 5,38% par an durant ces 5 années.

Remarque :
En cas de baisse, n'oubliez pas le − pour t…