Chapitre VI

Variables aléatoires discrètes finies

Contenus

– Espérance d'une variable aléatoire discrète.

– Loi binomiale B(n,p) ; espérance.

– Coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$; triangle de Pascal.

Capacités attendues

– Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.

– Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour n $\leqslant$ 10.

– Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.

– Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiale :

- interpréter l'événement {X = k} sur un arbre de probabilité ;
- calculer les probabilités des événements {X = 0}, {X = 1}, {X = n}, {X = n - 1} et de ceux qui s'en déduisent par réunion ;
- calculer la probabilité de l'événement {X = k} à l'aide des coefficients binomiaux.

Table des matières

I. Rappel

Activité 1 p 162

Définitions :

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire (l'ensemble des issues possibles) ; on a défini une loi de probabilité sur cet univers.

On définit une variable aléatoire X sur Ω lorsque l'on associe un nombre réel à chaque issue.

Si $x_1, \dots, x_n$ désignent les valeurs prises par X, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles X prend la valeurs x_i. On note $P(X = x_i)$ la probabilité de cet événement.

La loi de probabilité est donnée par les x_i et les $P(X = x_i)$ (i allant de 1 à n).

On représente généralement la loi de probabilité par un tableau :

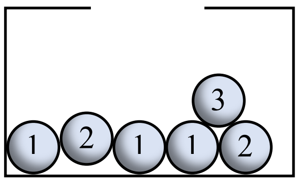
Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	x_1	...	x_i	...	x_n
Probabilité associée $P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$ ou p_1	...	$P(X = x_i)$ ou p_i	...	$P(X = x_n)$ ou p_n

Remarques :

- *La somme des probabilités doit toujours être égale à 1.*
- *Pour vérifier que vous avez une loi de probabilité, vous devez vérifier que vous avez bien toutes les issues listées dans votre tableau, qu'aucune probabilité n'est négative et que la somme des probabilités fait bien 1.*

Exemple :

On choisit une boule numérotée dans l'urne ci-contre et on lui associe le nombre inscrit sur la boule. On définit ainsi une variable aléatoire X qui prend les valeurs : 1, 2 et 3.



On notera $\{X = x_i\}$ (par exemple $\{X = 1\}$) l'événement « la valeur x_i, est obtenue »(par exemple « la valeur 1, est obtenue » et $\{X < x_i\}$ l'événement « toutes les valeurs strictement inférieur à x_i, sont obtenue ».

On obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de tirer une boule notée 1 (P(X=1)) est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Dans le tableau on peut avoir accès rapidement à $P(X < 3)$ (probabilité de tiré une boule avec un numéro strictement inférieur à 3, donc un 1 ou un 2 :

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Définition :

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre E(X) :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots x_i \times p_i + \cdots + x_n \times p_n$$

Remarque :

L'espérance est la moyenne pondérée des valeurs prises X.

Exemple :

Avec notre situation : $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

II. Coefficients binomiaux

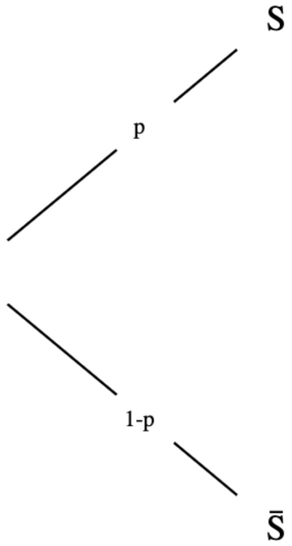
II.1. Épreuve de Bernoulli

Définition :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant 2 issues :

- Le succès, noté S de probabilité p ;
- L'échec, noté $\bar{S}$, de probabilité $q = 1 - p$;
- p est le paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

L'arbre correspondant à une épreuve de Bernoulli est donné ci-contre :

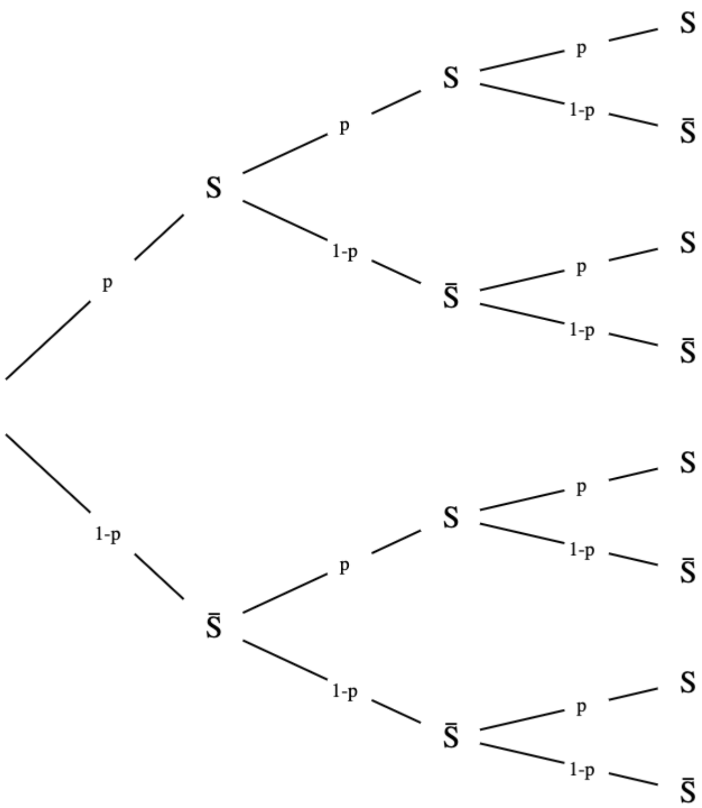


II.2. Schéma de Bernoulli

Définition :

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.

Vous trouverez ci-contre un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et p : il y a trois répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.



II.3. Coefficients binomiaux

Act. 3 p 166

Définition :

On note X la variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès.

Pour k tel que $0 \leq k \leq n$, on appelle coefficient binomial le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ sur l'arbre représentant le schéma de Bernoulli.

Ce coefficient binomial est noté $\binom{n}{k}$ qui se lit « k parmi n ».

Exemple :

Pour l'exemple précédent, si l'on veut le nombre de chemins qui mènent à 2 succès sur les 3 tirages, il suffit de calculer : $\binom{3}{2}$.

Propriétés :

- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad et \qquad \binom{n}{1} = n$$

  Cela veut dire que dans une épreuve à n répétitions, il n'y a qu'un chemin qui mène à 0 succès, et n chemins qui mène à 1 succès.

- Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

II.4. Calcul d'un coefficient binomial

Act. 4 p 166

II.4.a. Avec le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de trouver rapidement la valeur d'un coefficient binomial.

Pour le construire, c'est simple, le résultat d'une case est obtenue en additionnant la valeur de la case au-dessus d'elle et à gauche de celle-ci.

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Pour obtenir la case jaune 3, on a additionné les cases vertes : 1+2.

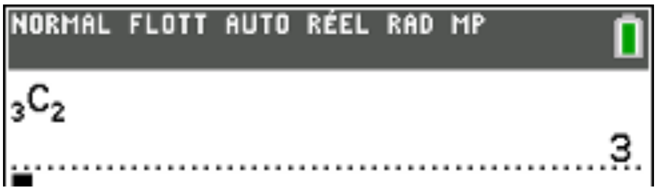
Ainsi, si l'on veut $\binom{3}{2}$, on lit que cela fait 3.

Il y a donc 3 chemins qui mène à 2 succès dans une épreuve répétée 3 fois.

II.4.b. Avec la calculatrice

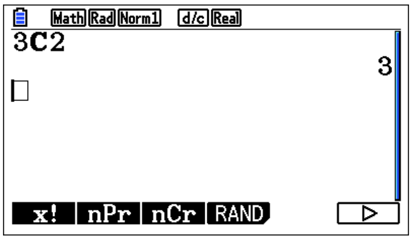
TI : $\boxed{\text{Math}}$ puis `PROBA` et `3 :Combinaison`.

Pour $\binom{3}{2}$:



Numworks :
Touche Toolbox (paste)/ Probabilités/Dénombrement puis $\binom{n}{k}$ …

Casio :
$\boxed{\text{OPT}}$ puis `PROB` et `nCr`



III. Loi binomiale

Act. 2 p 162

Définition :
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans une schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que X soit égal à k (donc qu'il y ait k succès sur les n répétitions) est : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Exemple :
En France 10% de la population a les yeux bleus.
On choisit au hasard 25 personnes dans cette population.
Comme le nombre d'habitants est élevé, on considère qu'il suit la loi binomiale de paramètre $n = 25$ et $p = 0{,}1$.
La probabilité que 5 de ces personnes aient les yeux bleus est :

$$P(X=5) = \binom{25}{5} 0{,}1^5 \times (1-0{,}1)^{25-5} \approx 0{,}0645 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Espérance :
Propriété :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors son espérance est : $E(X) = n \times p$.

Pour l'exemple précédent, on a une espérance de : $E(X) = 25 \times 0{,}1 = 2{,}5$.
Cela signifie que si l'on formait un grand nombre de groupe de 25 personnes, il y aurait en moyenne 2,5 élèves avec des yeux bleus.